Extraits des newsgroups sur le produit tensoriel

(compilation de janvier 2002 issue d'une recherche Google sur "produit tensoriel")

De: Christian Ohn (widor@st-sulpice.org) le 22 jan 1999

Soient V et W deux espaces vectoriels. On voudrait disposer d'un multiplication des vecteurs de V par ceux de W, ou le produit obtenu serait element d'un hypothetique espace vectoriel "produit" de V par W. Si l'on note $v \otimes w$ un tel produit (hypothetique) de deux vecteurs (v dans V et w dans W), on aimerait, comme pour tout produit qui se respecte, avoir les proprietes suivantes :

$$
\begin{aligned}
(v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w \\
v \otimes (w + w') &= v \otimes w + v \otimes w' \\
(av) \otimes w &= a(v \otimes w) \\
v \otimes (aw) &= a(v \otimes w)
\end{aligned}
$$

(ou, dans les deux dernieres égalites, a est un scalaire, et les membres de droite font appel à la multiplication scalaire de notre hypothetique structure d'espace vectoriel "produit").

Jusque là, c'est un peu flou, mais les égalites ci-dessus contiennent en elles toute l'idée de la définition : on part d'un espace vectoriel Z ayant pour base l'ensemble $V \times W$, produit cartesien de V par W (suivant le corps sur lequel on travaille, Z peut être de dimension ENORME). Tout element de Z s'ecrit donc (de maniere unique) sous la forme $\sum_{i=1,..,k} a_i(v_i, w_i)$. On definit alors le produit tensoriel $V \otimes W$ comme etant le quotient de Z par le sous-espace vectoriel engendre par tous les elements de l'une des formes suivantes :

$$
\begin{gathered}
(v + v', w) - (v, w) - (v', w) \\
(v, w + w') - (v, w) - (v, w') \\
(av, w) - a(v, w) \\
(v, aw) - a(v, w)
\end{gathered}
$$

En particulier, si l'on note $v \otimes w$ l'image de (v, w) dans ce quotient, on y a bien les identites donnees plus haut. (On a tout fait pour...) Dans $V \otimes W$, tout element peut encore s'ecrire sous la forme $\sum_i a_i v_i \otimes w_i$ (comme dans Z), ou meme $\sum_i v_i \otimes w_i$ (en profitant de l'identite $a(v \otimes w) = (av) \otimes w$), mais comme on est passe au quotient, l'ecriture n'est evidemment *plus* unique.

: quelle est son utilité

Par exemple, si X est un troisieme espace vectoriel, l'ensemble des applications bilineaires $VxW \rightarrow X$ s'identifie canoniquement a l'ensemble des applications *lineaires* $V \otimes W \rightarrow X$. L'ensemble des applications lineaires $V \rightarrow W$ s'identifie a $W \otimes V^*$ (V^* le dual de V). Le produit tensoriel s'avere ainsi tres utile dans une etude plus avancee (pas au niveau DEUG evidemment) des applications lineaires et multilineaires, a tel point qu'en geometrie differentielle (les espaces vectoriels y intervenants etant du genre espace tangent a une variete en un point), on ne peut plus vraiment s'en passer pour decrire certaines notions (structure riemannienne, structure symplectique, forme volume, etc).

Si V et W sont les espaces de deux representations d'un groupe donne, $V \otimes W$ en devient un aussi, et l'etude de cet espace est interessante en theorie des representations. Par exemple, meme si V et W sont irreductibles, $V \otimes W$ ne l'est generalement pas, d'ou la question : comment $V \otimes W$ se decompose-t-il en somme de rep. irred. ? Cette question est notamment tres importante dans certains problemes de mecanique quantique (mais la, je ne suis pas competent pour en parler en detail).

– Christian Ohn

---

de: Brieuc (bfcedm02@club-internet.fr) le 23 jan 1999

A partir de 2 fonctions $f(x)$ et $g(y)$, on peut fabriquer une fonction
$h(x, y) = f(x).g(y)$ de 2 variables independantes x et y. h est le "produit tensoriel" de f et g , $h = f \otimes g$
$k(x, y) = f1(x).g1(y) + f2(x).g2(y) + ...$ n'est pas reductible en general à un simple produit $f(x).g(y)$.

En dimension finie, un vecteur rapporté à une base se presente comme une liste de n coordonnées, ou encore une fonction d'indice prenant n valeurs possibles.

On peut donc faire le produit tensoriel d'un vecteur de dimension n avec un vecteur de dimensions m, ce qui donne une matrice $m.n$; les combinaisons linéaires de ces tenseurs evoluent dans un espace de dimensions $m.n$!

En fait, il s'avère que le produit tensoriel ne dépend pas des bases choisies. Exemple : reprendre $h(x, y) = f(x).g(y)$ dans lesquels x et y sont des vecteurs et f et g des formes linéaires : h est une forme bilinéaire, produit tensoriel des formes f et g !

Par "dualité", x et f jouant des roles symétriques ($f(x) = < f, x > =$ "$x(f)$"), on peut aussi definir le produit tensoriel de x par y ($x \otimes y$), comme fonctions de f et g !

Quand x et y proviennent du meme espace, on peut definir des tenseurs symétriques comme $f \otimes g + g \otimes f$ ou des tenseurs antisymétriques $f \otimes g - g \otimes f$

Il y a aussi des tenseurs multi-lineaires: $h(x, y, z) = f(x).g(y).k(z) + ...$ (3-lineaire).

Une application lineaire A definit un tenseur bilineaire du style $x \otimes f + y \otimes g + ...$ (mixte vecteur$\otimes$ forme) pour le voir, il suffit de former l'expression: $f(A(x)) = < f, A.x >$, qui est linéaire en f et lineaire en x ! donc bilineaire en (f, x) autrement dit l'application A donne lieu à une forme bilinéaire $a(f, x) = < f, A.x >$ ... Brieuc.

De :Sylvain Poirier le 23 jan 1999

J'ai une autre définition à en proposer (valable pour des espaces vectoriels de dimension éventuellement infinie, sur un corps K):

Soient E et F deux espaces vectoriels. on va construire $E \otimes F$ a partir de son dual. Soit B l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans K. A tout (x, y) appartenant à $E \times F$ on associe une forme linéaire sur B, par:

$$(x, y) : f \to f(x, y)$$

Alors le sous-espace vectoriel du dual de B engendré par l'image de $E \times F$ s'appelle le produit tensoriel de E par F. Notons-le $E \otimes F$. On vérifie alors que le dual de $E \otimes F$ est égal à B.

De plus, si X est une base de E et Y est une base de F, alors le produit cartésien $E \times F$ constitue une base de $E \otimes F$.

Un élément T du produit tensoriel $E \otimes F$ est équivalent à la donnée d'une application linéaire u de E^* dans F de rang fini et transposable en une application linéaire v de $F*$ dans E. Alors pour toute base $(y_1, ..., y_n)$ de l'image de u il existe une unique famille $(x_1, ..., x_n)$ d'elements de E telle que

$$T = x_1 \otimes y_1 + ... + x_n \otimes y_n$$

Alors $(x_1, ..., x_n)$ est une base de l'image de v, et n est le nombre minimum d'elements de la forme $x \otimes y$ à additionner pour obtenir T.

Plus précisément, pour toute expression $T = x_1 \otimes y_1 + ... + x_n \otimes y_n$, le nombre n est minimum si et seulement si les familles $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ sont toutes deux libres, et alors elles sont des bases des espaces images des applications linéaires correspondantes.

Si E est de dimension finie, alors $E \otimes F$ est égal à l'ensemble des applications linéaires de E^* dans F.

Si un des deux espaces E et F est de dimension finie, alors le dual B de $E \otimes F$ s'identifie à $E^* \otimes F^*$. Sinon on a en tout cas une inclusion de $E^* \otimes F*$ dans B.

De :michel@lpthe.jussieu.fr (michel@lpthe.jussieu.fr) Date :2001-07-22 08:34:32 PST

Wumbat <benoitstroh@worldonline.fr> wrote:

Y'a quelqu'un qui pourrait m'expliquer "simplement" ce qu'est le produit tensoriel et ses applications, en utilisant le moins possible de théorie des catégories si possible :=)

Si tu as deux modules E et F tu construis un module qui contient tous les $u \otimes v$ et toutes leurs combinaisons linéaires, de façon que l'on ait $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$

$(\lambda u) \otimes v = \lambda u \otimes v$

et pareil pour v.

Plus formellement ça veut dire le quotient du module libre engendré par les couples (u, v) - dans le produit cartésien de E et F - par le sous module engendré par les relations ci-dessus.

Pour des espaces vectoriels c'est trés simple: si e_i est une base de E et f_j une base de F alors $E \otimes F$ est l'espace vectoriel engendré par la base $e_i \otimes f_j$ et donc de dimension dim E. dim F

Pour $u = \sum_i \lambda_i e_i etv = \sum_j mu_j f_j$ on a $u \otimes v = \sum_{i,j} \lambda_i mu_j e_i \otimes f_j$.

Evidemment tous les éléments de $E \otimes F$ ne s'écrivent pas sous forme factorisée $u \otimes v$.

Finalement la définition catégorique c'est que $E \otimes F$ est l'objet universel tel que toute application bilinéaire $(E, F) \to G$ se factorise en $(E, F) \to E \otimes F \to G$ uniquement, où la dernière application est linéaire.

...

Il y a une application trés importante des produits tensoriels en Mécanique quantique. L'espace des états y est un espace vectoriel, et pour un système composé c'est le produit tensoriel des espaces des états des composants.

Voilà, si tu veux un exposé détaillé il y a un livre trés bien de Greub chez Springer qui s'appelle algèbre multilinéaire si je me souviens bien.

---

est-ce qu'il existe un exemple où ce produit tensoriel est isomorphe à quelquechose de simple ?

Oui. Par exemple... Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie sur k, $E^* \otimes F$ (où $E^* =$ Hom(E, k) est le dual de E) est Hom(E,F), l'ensemble des applications linéaires $E \to F$.

En effet, $E^* \otimes_k F$ s'injecte dans $Hom_k(E, F)$ par: $l \otimes y \to (e \to l(e)y)$ et il y a égalité des dimensions. Si par exemple (e_i), (f_j) sont des bases de E, F, l'applications qui à e_i associe $\sum a_i j f_j$ s'écrit $\sum_{i,j} a_i j e_i^* \otimes f_j$.

Si k est un corps, on a $M_n(k) \otimes_k M_p(k) = M_n p(k)$ (comme algèbres, avec le produit $(u \otimes v)(u' \otimes v') = (uu') \otimes (vv')$). Si A est une k-algèbre, $M_n(k) \otimes A = M_n(A)$.

De :michel@lpthe.jussieu.fr (michel@lpthe.jussieu.fr) le 2001-07-23

Wumbat (benoitstroh@worldonline.fr) wrote:

je commence à comprendre :=) est-ce qu'il existe un exemple où ce produit tensoriel est isomorphe à quelquechose de simple ?

Oui dans le cas des espaces vectoriels comme je t'ai dit. Si e_i et f_j sont des bases de E et F donnes toi arbitrairement des objets différents que tu notes $e_i \otimes f_j$. Il n'y a pas de risque d'équivalence entre de tels objets en utilisant les relations comme $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$ puisque l'on a des BASES. Alors $E \otimes F$ est simplement l'espace ayant pour base les $e_i \otimes f_j$.

De :Vincent Nesme (nesme@tabac.ens.fr) le 2000/05/01

Commençons par les espaces duaux :

Soit E un espace vectoriel sur un corps K.

On appelle "dual algébrique" de E l'ensemble des applications linéaires de E dans K et "dual topologique" de E l'ensemble des applications linéaires *continues* de E dans K (= R ou C).

En particulier, si E est de dimension finie, le dual topologique est égal au dual algébrique et tous deux sont isomorphes à E.

Bon, maintenant pour le produit tensoriel :

Je t'épargne la définition générale, tu n'en as pas besoin pour les espaces vectoriels.

Soit E et F deux espaces vectoriels sur K, (e_i) une base de E et (f_j) une base de F.

Alors une base de $E \otimes F$ (E tenseur F) est $(e_i \otimes f_j)$, pour i parcourant I et j parcourant J.

Exemple : si E et F sont de dimensions finies n et m, alors $E \otimes F$ est de dimension n×m.

De :Gilles Radenne (radenne@prao.ens.fr) Objet :Re: Tenseur Groupes de discussion :fr.sci.maths Date :2000/05/02

Un des interêts du produit tensoriel est que l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ vers G s'identifie de manière canonique à l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ vers G, donc un simple morphisme d'ev. (C'est même à l'aide de cette propriété qu'on le définit quand on veut faire les choses proprement.)

– Gilles

De :Dominique MARRO (dominique.marro@wanadoo.fr) le 1999/02/06

Salut

La réponse de Gilles te donne une idée du pourquoi de l'utilité des tenseurs, je vais simplement ajouter quelques trucs pour compléter mais qui ne remettent pas en doute du tout la réponse de Gilles. L'exemple du vecteur est bien sûr la plus simple approche des tenseurs, c'est un tenseur du premier ordre

Intêret : Tu manipules des vecteurs le plus longtemps possible avant de manipuler leurs coordonnées qui dépendent du repère de projection. A priori c'est la même chose mais en manipulant les coordonnées tu vois beaucoup moins bien la différence entre les propriétés intrinsèques de l'objet mathématique "vecteur" et les propriétés simplement liées à la projection dans une base.

Sinon un exemple de tenseur du second ordre, effectivement le tenseur des contraintes dans un solide élastique (ou un fluide ou ...) soumis à des efforts extérieurs est un exemple simple

En chaque point de ce solide si tu veux caractériser les efforts intérieurs il faut un objet mathématique plus général que le vecteur en effet en chaque point tu peux couper (par l'esprit) le milieu suivant une facette quelconque définie par la normale n.

Tu appelles F la force exercée par le milieu "à droite" de la coupure sur le milieu "à gauche" de la coupure.

Et bien on peut montrer sous certaines hypothèses que cette force est une application linéaire de n, c'est à dire que F=En avec E "une matrice 3*3" que l'on peut associer à un tenseur du second ordre (par isomorphisme .....). (attention un tenseur d'ordre deux n'est pas simplement une matrice 3*3, si la base de projection n'est pas orthonormée alors les coordonées du tenseur ne changent pas comme celles d'une matrice d'application linéaire un peu comme la différences entre les matrices d'application linéaire et celle de formes quadratiques)

les efforts intérieurs en ce point sont entièrement définis par ce tenseur E (et ne peuvent être définis par un simple vecteur)

J'espère que ça t'aide à appréhender la notion de tenseur que tu sentiras correctement qu'après l'avoir manipulée concrètement et en lisant des ouvrages de physique et de math concernant cet objet (comme tu l'as fait dans ta jeunesse avec les vecteurs et les espaces vectoriels)

Bye

Dom

P.S : Un autre exemple simple : dans un milieu conducteur de la chaluer mais non isotrope la relation linéarisée entre le vecteur densité surfacique de flux de chaleur (q) et le vecteur gradient de température n'est plus simplement

$$q = \lambda * grad(T)$$

avec λ un scalaire (isotropie) mais $q = \lambda grad(T)$ avec λ un tenseur d'ordre 2 (une matrice 3*3 pour simplifier....mais attention ce n'est pas tout à fait la même chose ...)

****

Dominique MARRO e-mail : dominique.marro@wanadoo.fr

De :philamicus (philamicus@ifrance.com) le 2000/06/22

Bonjour,

Je t'envoie quelques "trucs intuitifs" qui m'avaient aidé à comprendre tantôt l'intérêt des tenseurs. J'espère ne pas écrire trop d'aneries.

Tout d'abord, soit E un espace vectoriel sur R dont une base est donnée par la famille (en) et E^* son dual.

On commence par un petit tenseur d'ordre deux. Le produit tensoriel de $E \otimes E^*$ a les mêmes propiétés que l'espace des formes bilinéaires de $E \times E^*$.

Quand j'écris $T = T^i_j.e_i \otimes e^j$, il faut comprendre que les Tij sont les coefficients de mon tenseur sur la base canonique de $E \otimes E^*$. Par exemple, le vecteur de cette base $e_1 \otimes e^2$ représente la forme bilinaire :

$$E \times E^* \longrightarrow R$$

$$(e_1, e^2) \mapsto 1$$

$$(e_i, e^j) \mapsto 0 \text{ si } i \neq 1 \text{ et } j \neq 2$$

Le trucs intéressant avec ces coefficient T^i_j est qu'ils vérifient des formules de transformation suite à un changement des repères, formules qui sont "assez universelles".. Soit, par exemple une nouvelle base (e'n) définie par rapport à (en) par :

e'j = sigma(k) (Bkj * ek) , et B =(Bki) matrice de changement de repère et la matrice inverse de B est supposée exister et notée B' = (B'lm).

Alors le tenseur T précédent aura les nouvelles coordonnées T'kl telles que :

T'kl = sigma(i,j) (B'ik. Blj) . Tij (j'espère que les indices ne sont pas trop faux).

Et ça, c'est très intéressant. Le terme B' correspond au terme contravariant de la première coordonnée qui se trouve dans E, le terme B est dit covariant et associé à la coordonnée dans E^*. La généralité de cette propriété s'aperçoit lorsqu'on calcule les nouvelles coordonnée d'une matrice, ou d'une fonction bilinéaire ...On peut les ramener à un calcul tensoriel.

L'ensemble tensoriel précédent est lui même un e.v. : on peut aditionner les tenseurs ou les multiplier par un scalaire, on retrouvera un tenseur.

On définit encore une autre opération appelée contraction entre deux vecteurs qui est fondamentale :

On contractera T et K appartenant à $E \otimes E^*$ suivant i et k en constituant le nouveau tenseur C tel que:

$$Clm = \sum_{i,k} TimKli$$

Tu trouveras par exemple la composition de fonction linéaire en contractant deux tenseurs associées à deux matrices.

On peut généraliser aux produits tensorielles $E \otimes E^* x...E$ ou (E apparait n fois et E^* m fois) aux espaces des formes multilinéaires (ordre n+m).

Bon, j'arrête là...mais ce n'est qu'une introduction bien maladroite au sujet qui est très vaste.

Si tu as des questions sur ce que je viens d'écrire, je suis à ta disposition.

Amicalement. Phil.

De :Antoine Chambert-Loir (chambert@borel3.institut.math.jussieu.fr) le 2000/06/22

philamicus (philamicus@ifrance.com) wrote: *Je t'envoie quelques "trucs intuitifs" qui m'avaient aidé à comprendre tantôt l'intérêt des tenseurs. J'espère ne pas écrire trop d'aneries.*

Apparemment pas trop, sauf que c'est le mauvais point de vue, et malheureusement celui qui domine dans l'un des domaines qui mange le plus de tenseurs : la géo. diff.

Du point de vue algébrique, tout est bien plus simple. On se donne deux espaces vectoriels V et W sur R (mais la théorie marche si R est un anneau et V et W deux R-modules) (et même si R n'est pas commutatif, V et R deux bi-modules !)

L'espace vectoriel $V \otimes W$ vérifie ce qu'on appelle une propriété universelle.

On a 1/ une application bilinéaire $V \times W \longrightarrow V \otimes W$ telle que l'image du couple (v, w) est notée $v \otimes w$ d'où plein de relations : $(av + a'v') \otimes w = a(v \otimes w) + a'(v' \otimes w)$, etc.

2/ on suppose que cette application bilinéaire est la "meilleure" possible : si on s'en donne une autre, disons $f : VxW \longrightarrow T$ où T est un troisième espace, alors il existe une unique application linéaire F (les mots importants sont unique et linéaire) $F : V \otimes W \longrightarrow T$ telle que $F(v \otimes w) = f(v, w)$ pour tous v et w

La morale de l'histoire est que :

1/ les éléments de $V \otimes W$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $v \otimes w$, appelés tenseurs décomposés

2/ une telle combinaison linéaire somme $a_i(v_i \otimes w_i)$ est nulle si et seulement si pour toute application bilinéaire f sur VxW, l'évaluation $\sum a_i f(v_i, w_i)$ est nulle.

De plus (ici je suppose que R est un corps) si e1... en est une base de V et $f1...fm$ une base de W, les $ei \otimes fj$ (donc mn éléments de $V \otimes W$) forment une base de $V \otimes W$.

On peut jouer à tout : continuer $V1 \otimes V2 \otimes ... \otimes Vn$ pour des espaces vectoriels $V1, ..., Vn$, c'est associatif comme il faut. Si $V1 = V2 = ... = Vn$, on peut aussi jouer à remplacer application n-linéaire par "application n-linéaire alternée" ou "appl. n-line. symétrique".

Tu retrouves le lien avec les définitions de géo diff parce que là bas, un tenseur est donné par ses composantes dans la base en question et les formules que l'on donne en général sont les formules de changement de coordonnées lorsque on change de base.

Pour les opérations du style contraction : $E \otimes E^* \to R$

Pour montrer leur existence, il suffit de noter que l'application $E \times E^* \longrightarrow R$, $(e, f) \mapsto f(e)$ est bilinéaire, donc il existe une unique application linéaire telle que $e \otimes f$ a pour image $f(e)$, etc.

– Antoine Chambert-Loir

"a.delestienne" wrote:

bonjour,

je recherche des sites ou je pourrais télécharger des cours ou tout autre type de documents concernant le calcul tensoriel appliqué à la physique.(en français uniquement.)

merci.

Un cours de mecanique des fluides est disponible ici (format ps):
http://www.ens-lyon.fr/~sravier/MF.html

Un cours de mecanique classique est ici (pdf) :
http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/cadre.html?marleau_mc2
(suite de http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/cadre.html?marleau_mc1)

Un autre est disponible ici (deski-herezh.ps.gz) :
http://belz.univ-ubs.fr/labadmin/Pub/doc/ps/Deski-Herezh/ ainsi qu'au format html :
http://belz.univ-ubs.fr/labadmin/Pub/doc/html/Deski-Herezh/code.html

Leur point d'entree est 'Documentation' ici :
http://belz.univ-ubs.fr/labadmin/Documentation/

Un cours sur les formes differentielles :
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/eem/node12.html
("Cours de gémétrie différentielle et symplectique" :
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/)

En esperant que tout ca vous aidera un peu,

Il y a aussi (entre autres) un cours de relativite generale ici : http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/

"Une introduction à l'agèbre et l'analyse tensorielle destinée aux mécaniciens" ici :
http://esm2.imt-mrs.fr/gar/index.html

Voir aussi le passage des vecteurs aux tenseurs ici :
http://sigmund.insa-lyon.fr/francais/cours/3gen/chap1.htm