Sylvain Poirier
Mias 2, Septembre 2003

Algèbre linéaire

2. Espaces vectoriels quotients

Préliminaires

Lemme 1. *Soient trois ensembles X, Y, Z et deux applications $f : X \to Y$ et $g : X \to Z$ telles que f est surjective et*

$$\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x').$$

Alors il existe une unique application $h : Y \to Z$ telle que $g = h \circ f$.

Démonstration:
Pour toute application $h : Y \to Z$, on a

$$g = h \circ f \Leftrightarrow (\forall x \in X, \forall y \in Y, f(x) = y \Rightarrow g(x) = h(y)).$$

Montrons qu'un tel h existe et est unique. Par hypothèse

$$\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$$
$$\forall x \in X, \forall y \in Y, f(x) = y \Rightarrow (\forall x' \in X, f(x') = y \Rightarrow g(x') = g(x))$$
$$\forall y \in Y, \forall x \in X, f(x) = y \Rightarrow (\exists z \in Z, \forall x' \in X, f(x') = y \Rightarrow g(x') = z)$$

Comme f est surjective, on a

$$\forall y \in Y, \exists z \in Z, \forall x' \in X, f(x') = y \Rightarrow g(x') = z.$$

Remplaçons les x' par des x. D'autre part, comme f est surjective il existe un antécédent x de y indépendamment de z, donc il ne peut pas exister plusieurs $z \in Z$ distincts et qui soient simultanément égaux à $g(x)$ quel que soit x dans l'ensemble non vide des antécédents de y:

$$\forall y \in Y, \exists! z \in Z, \forall x \in X, f(x) = y \Rightarrow g(x) = z.$$

Donc il existe une unique application $h : Y \to Z$ vérifiant

$$\forall y \in Y, \forall x \in X, f(x) = y \Rightarrow g(x) = h(y).$$

$\square$

Définition. *Soient un ensemble E, une loi de composition interne $T : E^2 \to E$ et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On dit que T est compatible avec $\sim$ si*

$$\forall x, y, x', y' \in X, (x \sim x' \text{ et } y \sim y') \Rightarrow T(x, y) \sim T(x', y').$$

Définition. *Soient un ensemble E, une loi de composition externe $T : K \times E \to E$ et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On dit que T est compatible avec $\sim$ si*

$$\forall k \in K, x, x' \in X, x \sim x' \Rightarrow T(k, x) \sim T(k, x').$$

Pour les lemmes 2 et 3 ci-dessous on fixe des ensembles E et F, et une application surjective $\pi : E \to F$, et on note $\sim$ la relation définie par $x \sim x' \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(x')$.

Lemme 2. *Soit une loi de composition interne $T : E^2 \to E$ compatible avec $\sim$. Alors il existe une unique application $T' : F^2 \to F$, appelée la loi quotient de T par π. telle que*

$$\forall x, y \in E, T'(\pi(x), \pi(y)) = \pi(T(x, y)).$$

Démonstration: il suffit d'appliquer le lemme 1 à $X = E^2$, $Y = F^2$, $Z = F$, $f : (x, y) \mapsto (\pi(x), \pi(y))$ et $g = \pi \circ T$, pour trouver $T' = h$. $\square$

Lemme 3. *Soit une loi de composition externe $T : K \times E \to E$ compatible avec $\sim$. Alors il existe une unique application $T' : K \times F \to F$, appelée la loi quotient de T par π, telle que*

$$\forall k \in K, \forall x \in E, T'(k, \pi(x)) = \pi(T(k, x)).$$

Démonstration: il suffit d'appliquer le lemme 1 à $X = K \times E$, $Y = K \times F$, $Z = F$, $f : (k, x) \mapsto (k, \pi(x))$ et $g = \pi \circ T$, pour trouver $T' = h$. $\square$

Lemme 4. *Soient données sur E des lois de composition internes et externes compatibles avec $\sim$, ainsi que des symboles de constantes (éléments privilégiés). Soient des entiers n et p, et des termes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de variables $x_1, \cdots x_n$, $k_1, \cdots k_p$, expressions formées des symboles des lois de compositions internes et externes, des symboles de constantes et des symboles $x_1, \cdots x_n$, $k_1, \ldots k_p$, telles que les applications $\mathcal{T}_E : E^n \times K^p \to E$ et $\mathcal{T}'_E : E^n \times K^p \to E$ qu'elles définissent sur E soient égales. Alors les applications $\mathcal{T}_F : F^n \times K^p \to F$ et $\mathcal{T}'_F : F^n \times K^p \to F$ qu'elles définissent sur F interprétant les symboles de lois par les lois quotients et les symboles de constantes par l'image de leurs valeurs par π, sont aussi égales.*

Démonstration: soit $(y_1, \cdots y_n, k_1, \cdots k_p) \in F^n \times K^p$. Comme π est surjective, il existe des éléments $x_1, \cdots x_n \in E$ tels que $\pi(x_i) = y_i$ pour tout i de 1 à n. Puisque les symboles de lois des termes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ s'interprètent dans F comme étant les lois quotients de celles de E et les constantes dans F comme les images des constantes dans E, on a $\pi(\mathcal{T}_E(x_1, \cdots x_n, k_1, \cdots k_p)) = \mathcal{T}_F(y_1, \cdots y_n, k_1, \cdots k_p)$, et de même pour $\mathcal{T}'$. Or par hypothèse, $\mathcal{T}'_E = \mathcal{T}_E$ donc $\mathcal{T}_F(y_1, \cdots y_n, k_1, \cdots k_p) = \mathcal{T}'_F(y_1, \cdots y_n, k_1, \cdots k_p)$. Ceci étant vrai pour tout $(y_1, \cdots y_n, k_1, \cdots k_p)$, il en résulte que $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}'_F$ $\square$

Notion d'espace vectoriel quotient

Définition. *Soient $F \subset E$ des K-ev. Nous appellerons quotient de E par F tout couple (G, π) où G est un K-ev et $\pi : E \to G$ est une application linéaire surjective telle que $\operatorname{Ker} \pi = F$. En pratique, G sera noté E/F, et π sera appelée la surjection canonique (ou la projection) de E dans E/F.*

Exemples:

1. Pour toute application linéaire f d'un K-ev E dans un K-ev F, $(\operatorname{Im} f, f)$ est un quotient de E par $\operatorname{Ker} f$. Ainsi, toute application linéaire de noyau F donne une construction d'un quotient de E par F.

2. Expérience courante d'une image à deux dimensions d'un objet 3D vu de loin: quotient par la direction d'observation.

Remarque: du fait de la surjectivité de π, il ne peut exister sur G qu'une seule structure de K-ev pour laquelle π est linéaire. En effet, toute opération entre des éléments de E détermine le résultat de la même opération entre leurs images par π dans G.

Notation. *Dans la suite, une expression algébrique comportant un ensemble au lieu d'une variable désignera l'ensemble des résultats obtenus avec une variable parcourant l'ensemble. En particulier,*

$$\forall x \in E, \; x + F := \{x + y | y \in F\}.$$

Lemme. *Si* (G, π) *est un quotient de* E *par* F,

$$\forall x, x' \in E, (\pi(x) = \pi(x')) \Leftrightarrow (x - x' \in F) \Leftrightarrow x \in (x' + F).$$

En effet, par linéarité de π, $\pi(x - x') = \pi(x) - \pi(x')$, donc $(\pi(x) = \pi(x')) \Leftrightarrow \pi(x - x') = 0 \Leftrightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} \pi = F \Leftrightarrow \exists y \in F, y = x - x' \Leftrightarrow \exists y \in F, x = x' + y \Leftrightarrow x \in x' + F.$ □

(En fait on n'a pas utilisé la surjectivité de π...)

Ceci va permettre de montrer l'existence et l'unicité du quotient à isomorphisme près. Commençons par l'existence:

Théorème. *Pour tout sous-*K*-ev* F *d'un* K*-ev* E*, la relation* $(x - x' \in F)$ *entre* x *et* x' *est une relation d'équivalence compatible avec les lois d'addition et de multiplication externe, et l'ensemble* $G = \{F + x | x \in E\}$ *des classes d'équivalences (où la classe de* x *est* $x + F$*) possède une structure d'espace vectoriel faisant de* $(G, x \mapsto x + F)$ *un quotient de* E *par* F.

Démonstration.

Première étape: La loi + étant une loi de groupe et F étant un sous-groupe, montrons qu'on a une relation d'équivalence. D'abord, soit $\pi : x \mapsto F + x$. Soit la relation $x \sim x' \Leftrightarrow (x - x' \in F) \Leftrightarrow (x \in x' + F)$.

Par propriété de groupe de + et puisque F est un sous-groupe additif, on a $\forall x, x',\ (x \sim x') \Leftrightarrow (x - x' \in F) \Leftrightarrow (F + x - x' = F) \Leftrightarrow (F + x = F + x')$.

Or $(F + x = F + x')$ est une relation d'équivalence entre x et x' donc $\sim$ aussi.

Deuxième étape: La loi de groupe + étant de plus commutative, elle est compatible avec cette relation d'équivalence. En effet, $x - x' \in F$ et $y - y' \in F$ implique, à l'aide des propriétés de groupe abélien, $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in F + F = F$ donc $x + y \sim x' + y'$.

Remarque: on peut aussi écrire la démonstration sous la forme $(x' \in F + x, y' \in F + y) \Rightarrow x' + y' \in (F + x + F + y = F + x + y)$.

Troisième étape: la multiplication par un scalaire est compatible avec $\sim$, autrement dit $\forall a \in K,\ x, x' \in E,\ x \sim x' \Rightarrow ax \sim ax'$. Cela résulte de la distributivité et du fait que F est stable par cette loi: $x - x' \in F \Rightarrow (ax - ax' = a(x - x') \in F)$.

On a ainsi défini des opérations entre classes d'équivalences pour lesquelles π est linéaire.

Enfin, le fait que les opérations ainsi définies entre classes d'équivalence obéissent aux axiomes d'espace vectoriel résulte du lemme 4. □

Théorème. *Soient deux applications linéaires* $f \in L(E, F)$ *et* $g \in L(E, G)$ *telles que* f *est surjective et* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. *Alors* $\exists! \varphi \in L(F, G)$ *tq* $g = \varphi \circ f$.

Démonstration. L'existence et l'unicité de l'application φ est une conséquence immédiate du lemme 1. Il reste à vérifier sa linéarité. Elle résulte de celles de f et g, de la manière suivante:

$$\forall y, y' \in F, \forall k \in K, \exists x, x' \in E, f(x) = y \text{ et } f(x') = y'$$

donc pour ces variables on a, du fait de la linéarité de f et de g,

$$\varphi(y + ky') = \varphi \circ f(x + kx') = g(x + kx') = g(x) + kg(x') = \varphi \circ f(x) + \varphi \circ f(x') = \varphi(y) + k\varphi(y').$$

□

Corollaire. *Il y a unicité du quotient de* E *par* F *au sens suivant: entre deux deux couples solutions* (G, π) *et* (G', π') *il existe un unique isomorphisme* $\varphi : G \to G'$ *tel que* $\varphi \circ \pi = \pi'$.

Le théorème précédent donne deux applications linéaires $\varphi : G \to G'$ et $\varphi' : G' \to G$ telles que $\varphi \circ \pi = \pi'$ et $\varphi' \circ \pi' = \pi$. Vérifions qu'elles sont inverses l'une de l'autre. Soit $\psi = \varphi' \circ \varphi$.

Montrons que $\psi = \mathrm{Id}_G$. On a $\psi \circ \pi = \varphi' \circ \varphi \circ \pi = \varphi' \circ \pi' = \pi$. Or, d'après le théorème précédent entre (G, π) et lui-même, il y a unicité de l'endomorphisme ψ de G tel que $\psi \circ \pi = \pi$. Mais on a également $\mathrm{Id}_G \circ \pi = \pi$. Donc $\psi = \mathrm{Id}_G$.

Par le même raisonnement, $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{Id}'_G$. Ainsi, φ et φ' sont inverses l'une de l'autre donc ce sont des isomorphismes. □

Convention. *On notera E/F le quotient de E par F, qu'on peut comprendre au sens de la construction 1), ou plus généralement comme étant un quotient quelconque dans la mesure où cela revient au même d'après 2).*

Remarque: si on dispose d'un supplémentaire de F dans E, autrement dit si $E = F \oplus G$, cela permet de contruire un quotient de E par F comme étant le couple (G, π) où π est la projection sur G parallèlement à F (autrement dit la deuxième projection que nous avons définie sur le produit $F \times G$ identifié à E par l'isomorphisme que nous avons vu). Cette construction du quotient semble plus simple, mais sa simplicité vient du fait qu'elle réutilise des résultats démontrés précédemment. Son inconvénient est qu'elle semble dépendre de l'existence (la construction) et du choix d'un supplémentaire, alors que la construction canonique du quotient que nous avons vu n'en dépend pas.

Théorème. *Si E est un K-ev de dimension finie et $F \subset E$ est un sous-K-ev, alors E/F est de dimension finie et* $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

Démonstration: vous avez vu en première année que F admet un supplémentaire G et qu'alors $\dim E = \dim F + \dim G$. Or, nous avons vu qu'un tel G est isomorphe à E/F, donc il a la même dimension. □

Décomposition canonique d'une application linéaire. On appelle décomposition canonique d'un $f \in L(E, F)$ toute donnée (G, s, j) où G est un K-ev, telle que $s \in L(E, G)$ soit surjective, $j \in L(G, F)$ soit injective et $f = j \circ s$.

On trouve une telle décomposition en prenant $G = \mathrm{Im}\, f$, $s = f$ en tout point et j l'inclusion de G dans F. Plus généralement, j étant une injection linéaire de G dans F identifie G à un sous-K-ev de F. D'autre part, (G, s) constitue un quotient de E par $\mathrm{Ker}\, f$. Ainsi, dans tous les cas cela montre que f représente géométriquement un isomorphisme entre le quotient $E/\mathrm{Ker}\, f$ et le sous-K-ev $\mathrm{Im}\, f$ de F.

De là découle l'égalité des dimensions, ce qui donne le théorème du rang.

Définition. *On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est de codimension finie si E/F est de dimension finie, et on définit alors sa codimension par* $\mathrm{codim} F = \dim(E/F)$.