Sylvain Poirier
Mias 2, Septembre 2003

Algèbre linéaire
Rappels et compléments de cours

On suppose fixé un corps commutatif K, qui en pratique sera le plus souvent $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Comme il est fixé, on pourra le sous-entendre: "espace vectoriel"$=$ K-ev. Un espace ou sous-espace vectoriel sera dit *nul* s'il vaut $\{0\}$ (singleton vecteur nul).

Vous avez vu passer la notion de produit d'une famille de n espaces vectoriels. En fait, la notion générale est celle du produit d'une famille quelconque d'espaces vectoriels, mais nous allons nous contenter de cas particuliers.

1) Pour tout ensemble X et tout K-ev E, l'ensemble puissance E^X des applications de X dans E est un K-ev pour les opérations

$$\forall f, f' \in E^X, \forall x \in X, (f+f')(x) = f(x) + f'(x)$$
$$\forall f \in E^X, \forall a \in K, \forall x \in X, (af)(x) = a(f(x)) = af(x)$$

Cela résulte des propriétés de K-ev de E.

Théorème 1. *Soient E et F deux K-ev. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un sous-K-ev de l'espace F^E des applications de E dans F.*

Démonstration:
• La somme de deux applications linéaires est linéaire:
$(f_1+f_2)(x+y) = f_1(x+y) + f_2(x+y) = (f_1+f_2)(x) + (f_1+f_2)(y)$ par la commutativité et l'associativité de l'addition;
$(f_1+f_2)(ax) = af_1(x) + af_2(x) = a(f_1+f_2)(x)$ par distributivité.
• La multiplication scalaire préserve la linéarité:
$(af)(x+y) = a(f(x+y)) = a(f(x)+f(y)) = af(x) + af(y)$ par distributivité,
$(af)(bx) = a(f(bx)) = a(bf(x)) = b(a(f(x)) = b(af)(x)$ par commutativité de la multiplication. $\square$

2) De manière analogue, étant donnés E, F deux K-ev, on appelle espace vectoriel produit $E \times F$ le produit cartésien $G = E \times F$ muni de la structure de K-ev défini par les *lois produits*

$$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \quad (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$
$$\forall (x,y) \in G, \forall a \in K, \quad a(x,y) = (ax, ay).$$

On vérifie facilement que c'est une structure de K-ev.

On remarque qu'à travers l'identification naturelle du produit $E \times E$ à l'ensemble puissance $E^{\{1,2\}}$, ces deux structures d'espace vectoriel coïncident.

Sur le K-ev produit $E \times F$ on définit canoniquement:

• Des inclusions j_1 et j_2 qui identifient respectivement E et F à leurs images E' et F' dans G (en évitant de les confondre en prévision du cas où $E = F$):

$$\begin{aligned} j_1 : \quad & E \hookrightarrow E \times F \\ & x \mapsto (x, 0) \\ j_2 : \quad & F \hookrightarrow E \times F \\ & y \mapsto (0, y) \end{aligned}$$

• Des projections:

$$\begin{aligned}\pi_1 : E \times F &\twoheadrightarrow E\\ (x,y) &\mapsto x\\ \pi_2 : E \times F &\twoheadrightarrow F\\ (x,y) &\mapsto y\end{aligned}$$

Toutes ces applications sont linéaires. On a: $E' = \operatorname{Im} j_1 = \operatorname{Ker} \pi_2$, $F' = \operatorname{Im} j_2 = \operatorname{Ker} \pi_1$, et $\pi_i \circ j_k$ vaut l'identité si $i = k$ et O sinon.

On a $G = E' \oplus F'$.

Théorème 2. *Soient E, F, G trois K-ev, $f : G \to E$, $g : G \to F$ des applications linéaires, alors l'application*

$$\begin{aligned}G &\to E \times F\\ x &\mapsto (f(x), g(x))\end{aligned}$$

est linéaire.

Vérification immédiate.

Théorème 3. *Soient E, F, G trois K-ev, $f_1 : E \to G$, $f_2 : F \to G$ des applications linéaires, alors il existe une unique application linéaire g de $E \times F$ dans G vérifiant $g \circ j_1 = f_1$ et $g \circ j_2 = f_2$; elle s'écrit $g(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$, ce qu'on note $g = f_1 \oplus f_2$.*

En effet, comme $(x,y) = (x,0) + (0,y)$, la linéarité de g implique que

$$g(x,y) = g(x,0) + g(0,y) = g \circ j_1(x) + g \circ j_2(y) = f_1(x) + f_2(y).$$

On vérifie que ce g est linéaire: l'expression trouvée se réécrit $g = f_1 \circ \pi_1 + f_2 \circ \pi_2$ or la composée de deux applications linéaires est linéaire, et la somme également. $\square$

Propriété. *La somme $F + G$ de deux sous-K-ev d'un K-ev E s'écrit $F + G = \operatorname{Im}(j \oplus j')$ où j et j' sont les inclusions canoniques respectives de F et G dans E.*

Rappel: on dit que deux sous-K-ev F et G d'un K-ev E sont supplémentaires dans E et on écrit $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Théorème 4. *On a $E = F \oplus G$ si et seulement si la somme $j \oplus j'$ de leurs inclusions canoniques est un isomorphisme de $F \times G$ dans E.*

En effet, d'une part $(E = F + G)$ équivaut à ($j \oplus j'$ est surjective), d'autre part vérifions que $(F \cap G = \{0\})$ équivaut à l'injectivité de $j \oplus j'$:

On sait qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est nul. Or, $\operatorname{Ker}(j \oplus j') = \{(x,y) \in F \times G | x + y = 0\} = \{(x,-x) | x \in F \text{ et } -x \in G\} = \{(x,-x) | x \in F \cap G\}$. Donc, $j \oplus j'$ est injective si et seulement si $F \cap G = 0$. $\square$

Ces propriétés se généralisent au produit d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels (ce qu'on peut voir comme découlant du cas ci-dessus grâce aux isomorphismes canoniques du style $E \times F \times G \approx (E \times F) \times G$ qui ramènent les produits finis à une succession de produits de deux K-ev à chaque fois).

Mais nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement au cas du produit de n copies de K pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque, autrement dit K^n:

Théorème 5. *Soit un K-ev E et une famille finie $(x_1, \cdots, x_n)$ d'éléments de E. Alors il existe une unique application linéaire f de K^n dans E telle que $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $f(e_i) = x_i$ où (e_i) est la base canonique de K^n; elle s'écrit*

$$f(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

On l'appelle l'application linéaire associée à la famille (x_i).

Proposition. *Une famille de vecteurs est libre (resp. génératrice) si et seulement si son application linéaire associée est injective (resp. surjective).*

Vérification immédiate.

Corollaire. *Toute base finie à n éléments d'un K-ev E définit un isomorphisme de K^n dans E.*

Cas des familles infinies

Soit I un ensemble infini. Dans le K-ev K^I, la famille $(e_i)_{i\in I}$ définie par $e_i(j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon est libre mais n'est pas génératrice. Le sous-K-ev qu'elle engendre est $K^{(I)}$ constitué des familles $(a_i)_{i\in I}$ telles que $\{i \in I | a_i \neq 0\}$ est fini. On dit donc que (e_i) est la base canonique de $K^{(I)}$. Alors, l'application canonique associée à une famille de vecteurs indexée par I se définit avec $K^{(I)}$ comme espace de départ, exprimée comme somme restreinte à la sous-famille finie des termes non nuls ($a_i \neq 0$), et les énoncés précédents s'appliquent toujours.

En dimension infinie, le théorème de la base incomplète (d'où découle l'existence de bases de tout espace vectoriel et l'existence de supplémentaires de tout sous-espace vectoriel) est plus difficile à démontrer, et nécessite un usage élaboré de l'axiome du choix appelé le théorème de Zorn, qui sort du cadre du présent cours. C'est un outil permettant de prouver l'existence d'objets impossibles à expliciter.

L'axiome du choix a plusieurs énoncés équivalents dont ces deux-ci:
CH1: Pour toute relation binaire $R \subset E \times F$ entre des ensembles E et F,

$$(\forall x \in E\ \exists y \in F\ x \mathrel{\mathrm{R}} y) \Rightarrow (\exists f : E \to F,\ \forall x \in E,\ x \mathrel{\mathrm{R}} f(x)).$$

CH2: Pour toute surjection s d'un ensemble F sur un ensemble E,

$$\exists f : E \to F,\ \forall x \in E,\ s(f(x)) = x.$$

Ces énoncés sont démontrables uniquement pour E fini (par récurrence), donc accepter l'axiome du choix n'a de conséquences que quand E est infini.

Théorème de Zorn sous sa forme pratique: tout ensemble A de parties d'un ensemble X, stable par union croissante (i.e. pour tout $B \subset A$ totalement ordonné par inclusion, l'union des éléments de B est dans A) possède un élément maximal pour l'inclusion.

On a facilement Zorn implique Choix. En effet, de Zorn on déduit CH2 en prenant $X = F$ et $A = \{Y \subset X | s_{|Y}$ est injective$\}$ mais la réciproque est beaucoup plus difficile à montrer.

Remarque: on peut déduire de Zorn l'existence de supplémentaires directement sans passer par le théorème de la base incomplète.

Autre remarque: certains mathématiciens s'intéressent à la théorie des ensembles sans axiome du choix, où les résultats mentionnés ici qui l'utilisent sont faux.

Exemples d'existences qui reposent sur l'axiome du choix (avec Zorn):

- L'existence de bases de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-ev; l'existence d'un supplémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$;
- Pour I infini, l'existence de bases de K^I, de supplémentaires de $K^{(I)}$ dans K^I; de bases du $\mathbb{R}$-ev des suites de réels bornées ou convergentes, des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, etc.

Exercice.

Soient E, F, G des K-ev, π et π' les projections canoniques de $F \times G$ sur F et G respectivement, et f une application de E dans $F \times G$. Que peut-on dire du rapport entre les deux assertions suivantes:

1) f est linéaire de E dans le K-ev produit $F \times G$
2) Les applications composées $\pi \circ f$ et $\pi' \circ f$ (de E dans F et G respectivement) sont linéaires.

Justifier la réponse.