

Chap.7 :

Le corps des nombres réels

1 Inventaire des propriétés de \mathbb{Q}

On imagine que quelque part on a construit \mathbb{N} , puis \mathbb{Z} , puis \mathbb{Q} , jusqu'à arriver à énoncer le théorème suivant, que nous admettrons ici.

Théorème 1 : *\mathbb{Q} est un corps commutatif totalement ordonné, archimédien et ne possédant pas la propriété de la borne supérieure.*

Nous allons nous contenter ici de donner quelques explications concernant ce théorème.

1.1 $(\mathbb{Q}, +, \times)$ corps commutatif

- (1) $(\mathbb{Q}, +)$ groupe abélien d'élément neutre 0.
- (2) $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ groupe abélien d'élément neutre 1.
- (3) \times est distributive par rapport à $+$.

1.2 Corps totalement ordonné

On sait que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$
On définit $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$
et $\mathbb{Q}^- = \{-x, x \in \mathbb{Q}^+\}$

Il est clair que :

- (1) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$
- (2) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$
- (3) \mathbb{Q}^+ est stable par l'addition et la multiplication.

Relation d'ordre :

Définition 1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$

$x \leq y$ ssi $(y - x) \in \mathbb{Q}^+$

→ Il est clair que \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{Q}

→ L'ordre est total : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, x \leq y$ ou $y \leq x$

→ Compatibilité avec les opérations :

(*) avec l'addition :

Si $a \leq b$, alors $\forall c \in \mathbb{Q}, a + c \leq b + c$

(**) avec la multiplication par les nombres positifs :

Si $a \leq b$, alors $\forall c \in \mathbb{Q}^+, ac \leq bc$

1.3 \mathbb{Q} est archimédien

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, ny \geq x$$

[Aussi grand que soit x et aussi petit que soit y , on arrive toujours à «manger» x à condition d'y employer un nombre suffisant de y].

1.4 \mathbb{Q} ne possède pas la propriété de la borne supérieure

Définition 2 : (E, \leq) ensemble totalement ordonné.

E possède la propriété de la borne sup ssi toute partie non vide et majorée de E possède une borne sup.

(\mathbb{Q}, \leq) ne possède pas cette propriété :

En effet, soit $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$

A est non vide et majoré, par exemple par 1,5.

Si A avait une borne sup x , on aurait $x^2 = 2$, ce qui est impossible, en voici d'ailleurs une démonstration par l'absurde.

Si $\exists x \in \mathbb{Q}^+, x^2 = 2$

On peut supposer $x = \frac{a}{b}$ irréductible, $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*$.

On a $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow a^2$ est pair

$\Rightarrow a$ est pair (si a était impair, a^2 le serait)

$\Rightarrow a^2$ est divisible par 4

$\Rightarrow 2b^2$ est divisible par 4

$\Rightarrow b^2$ est divisible par 2

$\Rightarrow b$ est pair

Contradiction, car a et b sont tous les deux pairs, donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

2 Suites convergentes, suites de Cauchy

2.1 Notion de convergence d'une suite

Prenons à priori (u_n) une suite rationnelle, mais tout ce que nous racontons dans ce paragraphe sera vrai plus tard avec des suites réelles, ou complexes, quand nous saurons ce que sont les nombres réels, et les nombres complexes.

Définition 3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Exercice 1 : *Unicité de la limite*

2.2 Suites de Cauchy

Définition 4 : (u_n) est une suite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \left. \begin{array}{l} n \geq n_0 \\ p \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$

Théorème 2 : *Toute suite convergente est de Cauchy*

Démonstration : en exercice

Théorème 3 : *La réciproque est fautive dans \mathbb{Q}*

Démonstration : Soit u_n le plus grand des rationnels x comportant n chiffres après la virgule tel que $x^2 < 2$.

On a donc :

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1,4$$

$$u_2 = 1,41$$

$$u_3 = 1,414$$

$$u_4 = 1,4142 \text{ etc.}$$

$\rightarrow (u_n)$ n'est pas convergente dans \mathbb{Q} car,

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l, \text{ alors } l^2 = 2 \text{ impossible.}$$

$\rightarrow (u_n)$ est de Cauchy

Soit $\varepsilon > 0$

Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n_0} \leq \varepsilon$

[çà existe, car \mathbb{Q} est archimédien]

et soit $n \geq n_0, p > 0$

$$u_n = 1,4142 \times \dots \times (\text{n chiffres})$$

$$u_{n+p} = 1,4142 \times \dots \times \dots \times (n+p \text{ chiffres})$$

$$\text{donc } |u_{n+p} - u_n| \leq 10^{-n} \leq 10^{-n_0} \leq \varepsilon$$

3 Construction de \mathbb{R}

4- 0 Remarque préliminaire :

On va utiliser ici de façon cruciale l'axiome de l'ensemble des parties, ou de la prise de parties (*en anglais : Power Set*), qui est l'axiome 8 de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

Axiome 1 : $\forall x \exists y \forall z (z \subset x \Rightarrow z \in y)$

Conséquence immédiate : D'après le schéma de compréhension, on peut maintenant parler de l'ensemble des parties de x , qui est défini comme un sous-ensemble de y .

Définition 5 : $\mathcal{P}(x) = \{z : z \subset x\}$

L'important pour nous, ici, est que nous allons pouvoir parler de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, ensemble des parties de \mathbb{Q} .

3.1 Notion de section commençante ouverte

Définition 6 : *On appelle section commençante ouverte de \mathbb{Q} tout ensemble $S \subset \mathbb{Q}$ vérifiant les 4 propriétés suivantes :*

(1) $S \neq \emptyset$

(2) $S \neq \mathbb{Q}$

(3) $\forall x \in S, y \leq x \Rightarrow y \in S$

(4) S n'a pas de plus grand élément, i.e. $\forall x \in S, \exists y \in S, x < y$

Dessin :

3.2 Nombres réels

Définition 7 : On appelle nombre réel toute section commençante ouverte de \mathbb{Q} , et on note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

On a donc

$$\mathbb{R} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : X \neq \emptyset \text{ et } X \neq \mathbb{Q} \text{ et } \forall x \in X, \forall y \in \mathbb{Q}, (y < x \Rightarrow y \in X)$$

$$\text{et } \forall x \in X, \exists y \in X, x < y\}$$

[\mathbb{R} existe d'après la remarque préliminaire et le schéma de compréhension].

Remarque 1 : Soit $x \in \mathbb{Q}$

L'ensemble $] -\infty, x[_{\mathbb{Q}} = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$ est une section commençante ouverte de \mathbb{Q} , donc un nombre réel.

On décide d'identifier \mathbb{Q} à une partie de \mathbb{R} , et tout rationnel avec l'ensemble des rationnels qui le précèdent.

Remarque 2 : Il n'est pas indispensable, dans cette théorie, de supposer que les sections commençantes qui définissent les nombres réels soient ouvertes. On l'a fait ici uniquement dans un souci d'unicité.

En effet, s'il est clair que le réel $\sqrt{2}$ est égal à la section commençante $] -\infty, \sqrt{2}[_{\mathbb{Q}}$, le nombre réel $\frac{2}{3}$ pourrait aussi bien s'écrire $] -\infty, \frac{2}{3}[_{\mathbb{Q}}$ que $] -\infty, \frac{2}{3}[_{\mathbb{Q}}$.

Cette ambiguïté ne concernant qu'une famille dénombrable de nombres réels, on trouvera dans certains ouvrages la définition suivante :

$$\mathbb{R} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : X \neq \emptyset \text{ et } X \neq \mathbb{Q} \text{ et } \forall x \in X, \forall y \in \mathbb{Q}, (y < x \Rightarrow y \in X)\}$$

Remarque 3 : La construction initiale de Dedekind s'effectuait à l'aide des «coupures» de rationnels.

On appelle coupure de \mathbb{Q} toute partition de \mathbb{Q} en 2 sous-ensembles A et B tels que :

(1) $A \neq \emptyset$

(2) $B \neq \emptyset$

(3) $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$

et on appelle \mathbb{R} l'ensemble des coupures.

Nos sections commençantes ne sont, bien sûr, que les «parties gauches» des coupures de Dedekind.

Définition 8 : On définit une relation d'ordre \leq sur \mathbb{R} par :

$$S, S' \in \mathbb{R}, S \leq S' \text{ ssi } S \subset S'$$

La vérification du fait que \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{R} est immédiate [les propriétés sont induites par celles de l'inclusion dans $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$].

Dans toute la suite, on utilisera indifféremment les notations \leq ou \subset .

Théorème 4 : (\mathbb{R}, \leq) est totalement ordonné.

Démonstration : Soient $S, S' \in \mathbb{R}$

→ Si $S \subset S'$, tant mieux.

→ Sinon, $\exists x \in S, x \notin S'$

Soit $y \in S'$: si $x \leq y$, alors $x \in S'$, faux

donc $y < x$

et donc $y \in S$

d'où $S' \subset S$, CQFD.

3.3 Opérations sur \mathbb{R}

3.3.1 L'addition

Définition 9 : Soient $S, S' \in \mathbb{R}$

On pose $S + S' = \{z \in \mathbb{Q} : \exists x \in S, \exists y \in S', x + y = z\}$

Propriétés de l'addition

$\alpha)$ $+$ est une loi interne : $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S + S' \in \mathbb{R}$

Démonstration : (1) $S + S' \neq \emptyset$ trivial

(2) $S + S' \neq \mathbb{Q}$:

$S \neq \mathbb{Q}$, donc $\exists x \in \mathbb{Q}, x \notin S$

$S' \neq \mathbb{Q}$, donc $\exists x' \in \mathbb{Q}, x' \notin S'$

posons $z = x + x'$

Si $z \in S + S'$, alors $z = y + y'$ avec $y \in S, y' \in S'$

On a $x + x' = y + y'$

donc l'une au moins des inégalités $x \leq y$ ou $x' \leq y'$ est vraie.

par exemple $x \leq y$

mais $x \notin S$, donc $y \notin S$, contradiction.

(3) $\forall z \in S + S', t \leq z \Rightarrow t \in S + S'$:

$z = x + y, x \in S, y \in S'$

posons $z - t = \varepsilon$, on a $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, donc $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{Q}^+$

On pose $\begin{cases} x' = x - \frac{\varepsilon}{2} \\ y' = y - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

$\left. \begin{array}{l} x' \in \mathbb{Q} \text{ et } x' \leq x \Rightarrow x' \in S \\ y' \in \mathbb{Q} \text{ et } y' \leq y \Rightarrow y' \in S' \end{array} \right\} \Rightarrow x' + y' \in S + S' \Rightarrow t \in S + S', \text{ CQFD.}$

(4) $\forall z \in S + S', \exists t \in S + S', z < t$:

$z = x + y, x \in S, y \in S'$

$\exists x' \in S, x' > x$

$\exists y' \in S', y' > y$

Soit $t = x' + y'$

On a $t \in S + S'$ et $t > z$

$\beta)$ $+$ est associative : $\forall (S, S', S'') \in \mathbb{R}^3, (S + S') + S'' = S + (S' + S'')$

Démonstration : laissée en exercice

[Il suffit d'écrire, en utilisant l'associativité de l'addition dans \mathbb{Q}].

$\gamma)$ $+$ est commutative : $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S + S' = S' + S$

Démonstration : C'est trivial.

δ) **Élément neutre :** On pose $\tilde{0} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} = \mathbb{Q}_-^* =]-\infty, 0[_{\mathbb{Q}}$

Il est clair que $\tilde{0} \in \mathbb{R}$

Soit $S \in \mathbb{R}$

$$S + \tilde{0} = \{x + y : x \in S, y \in \mathbb{Q}_-^*\}$$

Montrons que $S + \tilde{0} = S$:

$$\rightarrow S + \tilde{0} \subset S$$

Soit $z \in S + \tilde{0}$

$$z = x + y, x \in S, y \in \mathbb{Q}_-^*$$

donc $z < x \Rightarrow z \in S$

$$\rightarrow S \subset S + \tilde{0}$$

Soit $x \in S$

On sait $\exists y \in S, x < y$

d'où $x = y + u, u < 0$

donc $x \in S + \tilde{0}$

ε) **Élément opposé :**

Remarque 4 préliminaire : du fait que l'ordre est total, on a

$$\forall S \in \mathbb{R}, S \subset \tilde{0} \text{ ou } \tilde{0} \subset S$$

On dira que $\begin{cases} S \in \mathbb{R}^+ \text{ ssi } \tilde{0} \subset S \\ S \in \mathbb{R}^- \text{ ssi } S \subset \tilde{0} \end{cases}$

L'antisymétrie prouve que $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{\tilde{0}\}$

La totalité de l'ordre prouve que $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$

Définition de l'opposé : Soit d'abord $S \in \mathbb{R}^+$

posons $T = S \setminus \tilde{0}$

\rightarrow Si $T = \emptyset$, alors $S = \tilde{0}$

On pose alors $opp(\tilde{0}) = \tilde{0}$

\rightarrow Si $T \neq \emptyset$, alors T contient une infinité de rationnels

[en effet, si $T = \{0\}$, alors $S =]-\infty, 0]_{\mathbb{Q}}$, 0 serait le plus grand élément de S, absurde

donc T contient au moins un rationnel non nul, soit x , et donc tous les rationnels compris entre 0 et x , soit une infinité].

Soit $T' = \{-x, x \in T\}$

On pose $S^* = \tilde{0} \setminus T'$

Si S^* n'a pas de plus grand élément, on pose $oppS = S^*$
Si S^* a un plus grand élément ω , on pose $oppS = S^* - \{\omega\}$

Il est alors clair que $oppS \in \mathbb{R}$.

On vérifiera en exercice que :

(1) L'application

$$\begin{aligned} opp : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^- \\ S &\mapsto oppS \end{aligned}$$

est une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^- .

(2) Si on pose, pour tout $S \in \mathbb{R}^-$, $oppS =$ l'antécédent de S par l'application opp , on a $\forall S \in \mathbb{R}, S + oppS = \tilde{0}$

Notation : désormais, $\tilde{0} = 0$ et $oppS = -S$

Conclusion : $(\mathbb{R}, +)$ groupe abélien.

3.3.2 La multiplication

→ Définissons d'abord le produit de 2 réels positifs :

$$S, S' \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Notons } S^+ = S \setminus 0$$

$$S'^+ = S' \setminus 0$$

$$\text{et posons } S \times S' = \mathbb{Q}_-^* \cup \{xy, x \in S^+, y \in S'^+\}$$

On vérifie alors aisément que $S \times S' \in \mathbb{R}$

et même que $S \times S' \in \mathbb{R}^+$

→ On définit ensuite sur \mathbb{R} la fonction «valeur absolue» :

$$\text{Si } S \in \mathbb{R}^+, |S| = S$$

$$\text{Si } S \in \mathbb{R}^-, |S| = -S$$

→ Cas général : $S, S' \in \mathbb{R}$

Le réel $S \times S'$ est le réel dont la valeur absolue est $|S| \times |S'|$, et dont le signe est obtenu par application de la règle des signes.

Propriétés de la multiplication :

a) Par construction même, on a bien :

$$\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S \times S' \in \mathbb{R}$$

et on vérifiera à titre d'exercice les propriétés suivantes :

$$\text{b) } \forall (S, S', S'') \in \mathbb{R}^3, (S \times S') \times S'' = S \times (S' \times S'')$$

$$\text{c) } \forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S \times S' = S' \times S$$

$$\text{d) } \forall (S, S', S'') \in \mathbb{R}^3, S \times (S' + S'') = S \times S' + S \times S''$$

e) Existence d'un élément neutre pour \times :

$$\text{On pose } \tilde{1} =]-\infty, 1[_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_-^* \cup [0, 1[_{\mathbb{Q}}$$

$$\text{et on a : } \forall S \in \mathbb{R}, \tilde{1} \times S = S$$

f) Élément inverse :

$$\forall S \in \mathbb{R}, S \neq 0, \exists S^{-1} \in \mathbb{R}, S \times S^{-1} = \tilde{1}$$

[pour e) et f), raisonner comme pour l'addition, en remplaçant $+$ par \times , 0 par 1 et $-$ par $]$

Conclusion : $(\mathbb{R}, +, \times)$ corps commutatif

3.3.3 Compatibilité avec l'ordre

Il est immédiat de vérifier les 2 propriétés suivantes :

(*) Si $S \leq S'$ et si $T \in \mathbb{R}$, alors $S + T \leq S' + T$

(**) Si $S \leq S'$ et si $T \in \mathbb{R}^+$, alors $S \times T \leq S' \times T$

Conclusion : \mathbb{R} est un corps totalement ordonné.

3.4 \mathbb{R} est archimédien

Soit à démontrer que

$\forall S \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, nT \geq S$

→ Si $S \in \mathbb{R}^-$, trivial [prendre $n = 0$]

→ Si $S \in \mathbb{R}^+$, on pose $T' = T \setminus \{0\}$

$S \neq \mathbb{Q}$, donc $\exists t \in \mathbb{Q}, t \notin S$

Le réel t n'est donc pas inclus dans S et donc $S \subset t$

Soit $x \in T'$

\mathbb{Q} étant archimédien, $\exists n \in \mathbb{N}, nx \geq t$

et donc $nT \geq nx \geq t \geq S$, CQFD.

3.5 \mathbb{R} possède la propriété de la borne supérieure

Soit X une partie non vide et majorée de \mathbb{R}

$X = \{S_i, i \in I\}$ avec $\forall i \in I, S_i \subset M$

On pose

$$W = \bigcup_{i \in I} S_i$$

→ $W \in \mathbb{R}$:

(1) $W \neq \emptyset$ trivial

(2) $W \neq \mathbb{Q}$ car $W \subset M$ et $M \neq \mathbb{Q}$

(3) $\forall x \in W, y \leq x \Rightarrow y \in W$:

en effet, $x \in W \Rightarrow \exists i_0 \in I, x \in S_{i_0}$

$y \leq x \Rightarrow y \in S_{i_0}$

$$\text{et donc } y \in \bigcup_{i \in I} S_i = W$$

(4) $\forall x \in W, \exists y \in W, x < y$:

en effet, $x \in W \Rightarrow \exists i_0 \in I, x \in S_{i_0}$

$\Rightarrow \exists y \in S_{i_0}, x < y$

et $y \in W$, CQFD.

→ $\forall S \in X, S \leq W$:

i.e. $\forall i \in I, S_i \subset W$ trivial

→ $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in W, y > W - \varepsilon$:

Sinon $\exists \varepsilon > 0, \forall y \in W, y \leq W - \varepsilon$
donc $\forall i \in I, S_i \subset W - \varepsilon$

$$\text{donc } \bigcup_{i \in I} S_i \subset W - \varepsilon$$

$W \subset W - \varepsilon$, absurde.

Conclusion : \mathbb{R} est un corps totalement ordonné, archimédien et possédant la propriété de la borne supérieure.

Remarque 5 : *Le procédé utilisé ici arrive à saturation dès le 1^{er} coup, c'est-à-dire que si on recommence l'opération en considérant \mathbb{R}' l'ensemble des sections commençantes ouvertes de nombres réels, on n'ajoute rien de nouveau et $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$.*

4 Caractérisation de \mathbb{R}

On démontre et nous admettrons que tout corps totalement ordonné archimédien et possédant la propriété de la borne supérieure est isomorphe à \mathbb{R} , l'isomorphisme respectant la relation d'ordre.

L'objet que nous avons construit au paragraphe précédent est donc unique à isomorphisme près.

En particulier, la construction classique de \mathbb{R} par les suites de Cauchy conduit au même objet que notre construction précédente.

Rappelons-en les grandes lignes.

4.1 Rappels d'algèbre

Rappelons simplement le résultat fondamental suivant, dont on pourra trouver la démonstration dans tout bon cours d'algèbre commutative.

Théorème 5 : *A anneau commutatif unitaire, I idéal propre de A
 A/I est un corps \iff I est un idéal maximal.*

4.2 Construction de \mathbb{R} par les suites de Cauchy

Soit A l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels, muni de l'addition et de la multiplication, dont il est facile de voir que c'est un anneau CU, avec en particulier $0 = (0, 0, 0, \dots)$ et $1 = (1, 1, 1, \dots)$.

Soit I l'ensemble des suites tendant vers 0.

$$u \in I \iff \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Proposition 1 : *I est un idéal de $A = \mathcal{SC}(\mathbb{Q})$*

Démonstration : (1) La différence de 2 suites tendant vers zéro tend elle-même vers 0, donc $(I, +)$ sous-groupe de A.

(2) Soit $v \in I$ et $u \in A$, il faut montrer que $uv \in I$.

Lemme 1 : *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration du lemme : prenons $\varepsilon = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_0 \\ p \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq 1$$

En particulier $\forall p \geq 0, |u_{n_0+p} - u_{n_0}| \leq 1$

$$\text{i.e. } \forall n \leq n_0, |u_n - u_{n_0}| \leq 1$$

$$\text{i.e. } \forall n \geq n_0, u_{n_0} - l \leq u_n \leq u_{n_0} + l$$

Notons $\alpha = \text{Min}(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}; u_{n_0} - l)$

et $\beta = \text{Max}(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}, u_{n_0} + l)$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq u_n \leq \beta$, CQFD.

Démonstration du point (2) : Une suite de Cauchy étant bornée, le produit d'une suite tendant vers 0 par une suite de Cauchy quelconque tend forcément vers 0, donc I est bien un idéal de A.

Théorème 6 : I est un idéal *maximal* de $A = \mathcal{SC}(\mathbb{Q})$

Démonstration : Soit J un idéal de A contenant strictement I.

$$\exists u \in J, u \notin I$$

i.e.

$$\text{«on n'a pas } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \text{»}$$

i.e.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, |u_m| > \varepsilon \quad (1)$$

$$\text{par ailleurs, } (u_n) \text{ est de Cauchy, donc } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \left. \begin{array}{l} n \geq n_0 \\ p \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Appliquons la relation (??) à l'entier n_0 :

$$\exists m \geq n_0, |u_m| > \varepsilon$$

$$\text{et donc } \forall p \geq 0, |u_{m+p} - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \forall p \leq 0, |u_{m+p}| > \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\alpha > 0$

$$\left. \begin{array}{l} \exists n_1 \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_1 \\ p \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\alpha \varepsilon^2}{4}$$

d'où, si $n \geq \text{Sup}(m, n_1), p \geq 0$:

$$\left| \frac{1}{u_{n+p}} - \frac{1}{u_n} \right| = \frac{|u_{n+p} - u_n|}{|u_{n+p}| \cdot |u_n|}$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\alpha \varepsilon^2}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} |u_{n+p}| > \frac{\varepsilon}{2} \\ |u_n| > \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow |u_{n+p}| \cdot |u_n| > \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|u_{n+p}| \cdot |u_n|} < \frac{4}{\varepsilon^2}$$

$$\text{et donc } \left| \frac{1}{u_{n+p}} - \frac{1}{u_n} \right| < \frac{\alpha \varepsilon^2}{4} \times \frac{4}{\varepsilon^2} = \alpha$$

donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est de Cauchy

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{u} \in A \\ u \in J \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \in J \Rightarrow J = A, \text{ CQFD.}$$

Corollaire 1 : A/I est un corps.

Définition 10 : On pose $\mathbb{R} = A/I = \mathcal{SC}(\mathbb{Q})/\mathcal{S}(0)$

Le même phénomène de saturation que pour les sections commençantes se produit ici : on démontre facilement que \mathbb{R} est complet, i.e. que toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente, et que donc, si on recommence le même travail, le corps obtenu, $\mathcal{SC}(\mathbb{R})/\mathcal{S}(0)$, est isomorphe à \mathbb{R} .

Les autres propriétés de \mathbb{R} , notamment la propriété de la borne sup, sont plus difficiles à démontrer par cette méthode.

5 Principales propriétés de \mathbb{R}

Si on refuse de rentrer dans les détails, on peut très bien commencer une leçon sur \mathbb{R} en posant

Théorème 7 : *\mathbb{R} est un corps totalement ordonné archimédien et possédant la propriété de la borne supérieure.*

Comme on l'a vu, cette propriété caractérise \mathbb{R} à isomorphisme près et prouve, pour des raisons d'ordre algébrique (étant archimédien, \mathbb{R} est forcément de caractéristique nulle) que \mathbb{R} est une extension de \mathbb{Q} .

Nous allons en déduire les autres propriétés fondamentales de \mathbb{R} .

5.1 Le théorème des suites monotones

Théorème 8 : *Toute suite croissante et majorée de nombres réels est convergente.*

Démonstration : Soit $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n) .

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

i.e. $\forall x \in A, x \leq M$

A est donc une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , donc A admet une borne supérieure, soit l.

On va montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

Soit $\varepsilon > 0$

Par définition de la borne sup, $\exists x \in A, l - \varepsilon \leq x \leq l$

i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq l$

mais (u_n) est croissante, donc $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$

l est un majorant de (u_n) , donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$

Moralité : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l$, CQFD.

Parenthèse : Nous allons maintenant donner une autre application immédiate du théorème de la borne sup.

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$.

$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$

Soit $\mathcal{I}(f)$ l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f sur $[a, b]$.

Il est clair que $\forall x \in \mathcal{I}(f), x \leq M(b - a)$

$\mathcal{I}(f)$ est donc une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .

On pose $I(f) = \text{Sup} \mathcal{I}(f)$

De même, $S(f) = \text{Inf} \mathcal{S}(f)$, où $\mathcal{S}(f)$ désigne l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui majorent f sur $[a, b]$.

Définition 11 : *f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ ssi $I(f) = S(f)$ et, dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(x) dx = I(f) = S(f)$$

5.2 Définition de la fonction «partie entière» :

Soit x un nombre réel positif.

Comme \mathbb{R} est archimédien, il existe un entier n tel que $n \times 1 \geq x$, i.e. $n \geq x$

Soit $A = \{p \in \mathbb{N} | p \leq x\}$

A est non vide, car $0 \in A$, et majoré par n

donc A admet un plus grand élément, que l'on appellera la «partie entière» du réel x .

Définition 12 : pour $x \in \mathbb{R}^+$, $E(x) = \text{Max} \{p \in \mathbb{N} | p \leq x\}$

Remarque 6 : $E(x)$ est caractérisé par le fait que c'est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$

5.3 Développement décimal illimité d'un nombre réel positif

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

On définit une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$a_0 = E(x)$$

pour tout $k \geq 1$, $a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1} x)$

[par exemple, si $x = \pi = 3,141592\dots$,

$$a_0 = 3$$

$$a_1 = 31 - 10 \times 3 = 1$$

$$a_2 = 314 - 10 \times 31 = 4$$

$$a_3 = 3141 - 10 \times 314 = 1$$

$$a_4 = 31415 - 10 \times 3141 = 5 \text{ etc. }]$$

Il est clair que $a_0 \in \mathbb{N}$ et que $\forall k \geq 1, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

par ailleurs, si on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 10^{-k}, \text{ on a } \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq x \leq S_n + 10^{-n}$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et majorée par x , donc convergente.

$$\text{Soit } a = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

On a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + 10^{-n}) = a \text{ et donc, d'après le théorème des gendarmes, } x = a,$$

$$\text{i.e. } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x$$

On dira que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est le développement décimal illimité de x , et on écrira

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}, \text{ ou } x = a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$$

Réciproquement, soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels telle que $\forall k \geq 1, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

La suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 10^{-k} \text{ est croissante et majorée, par exemple par } a_0 + 1, \text{ donc convergente.}$$

Moralité : Tout nombre réel possède un développement décimal, et tout développement décimal définit un nombre réel.

Question : Y a-t-il bijectivité ?

Réponse : «Presque».

En effet, tout développement décimal fournit un réel et un seul.

En revanche, les suites $(215, 2, 8, 0, \dots, 0, \dots)$ et $(215, 2, 7, 9, 9, \dots, 9, \dots)$ conduisent au même nombre réel.

Par contre, si on applique à ce réel particulier la méthode vue au début du paragraphe, on obtiendra comme développement décimal $215, 280...0...$

On convient donc à partir de maintenant qu'il est interdit d'écrire des développements décimaux avec «que des neuf à partir d'un certain rang», et cette précaution garantit l'existence et l'unicité du développement décimal illimité.

5.4 Le théorème des suites adjacentes

Théorème 9 : *Théorème des suites adjacentes*

Hypothèses : (u_n) et (v_n) 2 suites réelles

(u_n) est croissante

(v_n) est décroissante

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

Conclusion : (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite l .

Démonstration : (u_n) est croissante et majorée par v_0 , donc convergente de limite l .

(v_n) est décroissante et minorée par u_0 , donc convergente de limite l' .

mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

donc $l' - l = 0$

i.e. $l' = l$, CQFD.

Exercice 2 : *Etudier la suite (u_n) définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$$

Autre exemple d'application :

Théorème 10 : *Toute fonction monotone bornée sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration dans le cas d'une fonction croissante :

On va découper $[a, b]$ en 2^n parties égales.

On pose

$$s_n(f) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{b-a}{2^n} f(x_i) = \frac{b-a}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} f(x_i)$$

et

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i)$$

$(s_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f , donc

$$\text{Sup} \{s_n(f) : n \in \mathbb{N}\} \leq I(f)$$

[car on calcule le sup sur un ensemble plus petit].

$$\text{De même, } \text{Inf} \{S_n(f) : n \in \mathbb{N}\} \geq S(f)$$

Si on démontre que $\text{Sup} \{s_n(f)\} = \text{Inf} \{S_n(f)\}$, on aura en particulier $I(f) = S(f)$, et donc on aura gagné.

mais on a visiblement $s_{n+1}(f) \geq s_n(f)$

en effet, si on note g_n la fonction en escalier correspondant au découpage en 2^n morceaux, on a, par construction même :

$$\forall x \in [x_{2k}, x_{2k+1}[, g_n(x) = f(x_{2k})$$

et par ailleurs $\begin{cases} \forall x \in [x_{2k}, x_{2k+1}[, g_{n+1}(x) = f(x_{2k}) \\ \forall x \in [x_{2k+1}, x_{2k+2}[, g_{n+1}(x) = f(x_{2k+1}) \end{cases}$

Comme f est croissante sur $[a, b]$, on a $f(x_{2k+1}) \geq f(x_{2k})$,

ce qui prouve que $g_{n+1} \geq g_n$ sur $[a, b]$,

$$\text{donc } \int_a^b g_{n+1}(x) dx \geq \int_a^b g_n(x) dx$$

c'est-à-dire $s_{n+1}(f) \geq s_n(f)$

donc $(s_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De même, $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, s_n(f) \leq S_n(f)$ [trivial].

$$\text{Enfin, } S_n(f) - s_n(f) = \frac{b-a}{2^n} [f(b) - f(a)]$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(f) - s_n(f)] = 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = l$$

mais, comme $(s_n(f))$ est croissante, $Sup \{s_n(f)\} = l$

de même, $Inf \{S_n(f)\} = l$, CQFD.

Remarque 7 : ce qui serait plus intéressant : démontrer qu'une fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, suppose connues les notions de compacité et de continuité uniforme.

Remarque 8 : Le théorème précédent montre l'importance en analyse des fonctions à variation bornée (différence de 2 fonctions monotones).

5.5 Le théorème des segments emboîtés

Théorème 11 : *Théorème des segments emboîtés*

Soit (I_n) une suite décroissante d'intervalles fermés

i.e. $I_n = [a_n, b_n]$, avec $a_n \leq b_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{long } I_n = 0, \text{ alors } \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x\}$$

Démonstration : \rightarrow Unicité :

$$\text{Soient } x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

Si $x \neq y$, posons $|x - y| = \varepsilon > 0$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{long } I_n = 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{long } I_{n_0} < \varepsilon$$

mais $x, y \in I_{n_0}$, donc $|x - y| \leq \text{long } I_{n_0} < \varepsilon$

d'où $\varepsilon < \varepsilon$, contradiction.

\rightarrow Existence :

On a (a_n) croissante
 (b_n) décroissante
 $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$
 et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes, (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite x .
 donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$
 i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [a_n, b_n]$

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n, \text{CQFD.}$$

5.6 Notion de suite extraite. Propriétés de compacité

Définition 13 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

On appelle suite extraite, ou sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, où $n_0, n_1, \dots, n_k, \dots$ est une suite strictement croissante d'entiers.

Théorème 12 : De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Définition 14 : Soit K une partie de \mathbb{R} .

K est compact ssi de toute suite de K on peut extraire une sous-suite convergente.

Le théorème ci-dessus prouve donc que tout intervalle réel fermé borné $[a, b]$ est compact.

Démonstration du théorème : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$

Soit S l'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n)

$$S = \{u_0, u_1, \dots\}$$

1^{er} cas : S ensemble fini

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$$

L'une au moins des valeurs x_i est prise une infinité de fois

[C'est la «variante infinie» du principe des tiroirs : si on a une infinité de chemises à ranger dans un nombre fini de tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contiendra une infinité de chemises].

Soit $n_0 = \text{Min} \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = x_i\}$

$n_1 = \text{Min} \{n \in \mathbb{N} - \{n_0\} \mid u_n = x_i\}$

$n_{k+1} = \text{Min} \{n \in \mathbb{N} - \{n_0, n_1, \dots, n_k\} \mid u_n = x_i\}$

La suite (u_{n_k}) est constante égale à x_i , donc convergente.

2^{ème} cas : S ensemble infini

On va raisonner par dichotomie :

Parmi les intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$, l'un au moins contient une infinité d'éléments de S .

On va construire par récurrence une suite (I_n) d'intervalles fermés bornés.

$$I_0 = [a, b]$$

Supposons I_n construit, $I_n = [a_n, b_n]$

→ Si $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ contient une infinité d'éléments de S , on pose $I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$

→ Sinon, on pose $I_{n+1} = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$

et $\text{long } I_{n+1} = \frac{1}{2} \text{ long } I_n$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{long } I_n = 0$$

D'après le théorème des segments emboîtés,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x\}$$

.....

On va maintenant construire la suite (u_{n_k}) .

On pose $n_0 = 0$

$$n_1 = \text{Min} \{n \in \mathbb{N}^* \mid u_n \in I_1\}$$

$$n_2 = \text{Min} \{n \in \mathbb{N}^* - \{n_1\} \mid u_n \in I_2\}$$

$$n_{k+1} = \text{Min} \{n \in \mathbb{N}^* - \{n_1, \dots, n_k\} \mid u_n \in I_{k+1}\}$$

On a bien $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

et $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n_k} \in I_k$

Montrons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = x$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists p \in \mathbb{N}, \text{long } I_p < \varepsilon$$

pour $k \geq p$, on a

$$\left. \begin{array}{l} u_{n_k} \in I_k \\ x \in I_k \end{array} \right\} \Rightarrow |u_{n_k} - x| \leq \text{long } I_k \leq \text{long } I_p < \varepsilon$$

Moralité : $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, k \geq p \Rightarrow |u_{n_k} - x| < \varepsilon$

i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = x, \text{ CQFD.}$$

5.7 Complétude de l'ensemble des nombres réels

Théorème 13 : \mathbb{R} est complet

i.e. toute suite de Cauchy de \mathbb{R} est convergente.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy

On sait que (u_n) est bornée

donc $(u_n) \subset [\alpha, \beta]$, on peut en extraire une suite convergente $u_{n_k} \rightarrow l$

On va montrer qu'en fait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$* u_{n_k} \rightarrow l, \text{ donc } \exists k_0 \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \Rightarrow |u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$** (u_n) \text{ étant de Cauchy, } \exists q_0 \in \mathbb{N}, \left. \begin{array}{l} n \geq q_0 \\ p \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N_0 = \text{Max}(n_{k_0}, q_0)$

et soit $n \geq N_0$

Appelons n_k le plus petit entier de la suite extraite qui soit $\geq N_0$ (ça existe par définition d'une suite extraite).

On a alors : $|u_n - l| = |(u_n - u_{n_k}) + (u_{n_k} - l)| \leq |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l|$

Or, $|u_n - u_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ car $n \geq q_0$ et $n_k \geq q_0$

et $|u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ car $n_k \geq n_{k_0}$

d'où $|u_n - l| < \varepsilon$, CQFD.

Exemple 1 : reprenons la suite (u_n) vue précédemment :

$u_n =$ le plus grand rationnel comportant n chiffres après la virgule tel que $u_n^2 < 2$

(u_n) est de Cauchy donc convergente vers l

par ailleurs il est clair que

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 < 2 < (u_n + 10^{-n})^2$

par passage à la limite, $l^2 \leq 2 \leq l^2$

d'où $l^2 = 2$

On pose $l = \sqrt{2}$

On construit par cette méthode les fonctions $\sqrt{\cdot}$, $\sqrt[3]{\cdot}$, etc.

Nous allons terminer ce paragraphe par une application très importante du fait que \mathbb{R} est complet.

5.8 Des théorèmes de point fixe

Théorème 14 : *Théorème du point fixe*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application «strictement contractante»,

i.e. telle que $\exists k \in]0, 1[$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

alors $\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

Démonstration : \rightarrow Unicité :

Supposons l'existence de 2 points fixes x et x'

$|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$

$|x - x'| \leq k|x - x'|$

Si $|x - x'| \neq 0$, alors $1 \leq k$, contradiction car $k < 1$, donc $x = x'$

\rightarrow Existence :

On construit une suite (x_n) :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \text{ fixé} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$,

$|x_{p+1} - x_p| = |f(x_p) - f(x_{p-1})| \leq k|x_p - x_{p-1}|$

En itérant le procédé, on arrive à $|x_{p+1} - x_p| \leq k^p|x_1 - x_0|$

Montrons que (x_n) est de Cauchy :

Soit $\varepsilon > 0$

$|x_{p+q} - x_p| = |(x_{p+q} - x_{p+q-1}) + (x_{p+q-1} - x_{p+q-2}) + \dots + (x_{p+1} - x_p)|$

$\leq |x_{p+q} - x_{p+q-1}| + |x_{p+q-1} - x_{p+q-2}| + \dots + |x_{p+1} - x_p|$

$\leq k^{p+q-1}|x_1 - x_0| + k^{p+q-2}|x_1 - x_0| + \dots + k^p|x_1 - x_0|$

$\leq k^p|x_1 - x_0|(1 + k + k^2 + \dots + k^{q-1})$

$\leq \frac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0|$

Or,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} k^p = 0 \text{ car } k \in]0, 1[$$

donc

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{k^p}{1-k} |x_1 - x_0| = 0$$

$$\text{i.e. } \exists p_0 \in \mathbb{N}, p \geq p_0 \Rightarrow \frac{k^p}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

$$\text{donc } \left. \begin{array}{l} \exists p_0 \in \mathbb{N}, \\ p \geq p_0 \\ q \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |x_{p+q} - x_p| \leq \varepsilon$$

La suite (x_n) est de Cauchy, donc convergente vers x

$$x_n \rightarrow x$$

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ [car } f \text{ continue]}$$

$$x_{n+1} \rightarrow f(x)$$

$$\text{mais } x_{n+1} \rightarrow x$$

D'après le théorème d'unicité de la limite, on a donc $f(x) = x$, CQFD.

Remarque 9 fondamentale : Il apparaît dans la démonstration que le point crucial est le fait que toute suite de Cauchy soit convergente. Le théorème 14 est donc encore vrai si on remplace \mathbb{R} par une partie complète de \mathbb{R} .

Or, on peut voir dans tout cours de topologie générale que les fermés de \mathbb{R} sont complets.

On peut donc appliquer le théorème du point fixe à une fonction strictement contractante $f : I \rightarrow I$, où I intervalle fermé $([a, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$).

Applications du théorème 14 : On trouve de nombreuses applications du théorème du point fixe en analyse, notamment dans le cours sur les équations différentielles.

Le théorème du point fixe admet également de nombreuses variantes.

Citons-en une très classique, assez utile elle aussi en analyse.

Théorème 15 : Soit $f : I \rightarrow I$, où I intervalle fermé de \mathbb{R}

$$\text{Si } \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in]0, 1[, \forall (x, y) \in I^2, |f^n(x) - f^n(y)| \leq k |x - y|,$$

$$\text{alors } \exists ! x \in I, f(x) = x$$

[sachant, bien entendu, que la notation f^n désigne l'itérée $n^{\text{ième}}$ de $f : f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois)]

Démonstration : Le théorème 14 fournit un unique $x \in I$ tel que $f^n(x) = x$, ce qui garantit l'unicité.

On va maintenant montrer qu'en fait $f(x) = x$

$$|f^n(f(x)) - f^n(x)| \leq k |f(x) - x|$$

$$|f(f^n(x)) - f^n(x)| \leq k |f(x) - x|$$

$$|f(x) - x| \leq k |f(x) - x|$$

$$\text{Si } f(x) \neq x, \text{ alors } 1 \leq k$$

Contradiction car $k < 1$.

6 Parties remarquables de \mathbb{R}

6.1 Parties dénombrables de \mathbb{R}

Définition 15 : E ensemble

E est dénombrable ssi il existe une bijection $u : \mathbb{N} \rightarrow E$

Remarque 10 : On a alors $E = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$

Il est donc possible de «lister» les éléments de E : le 0^{ième}, le 1^{er}, le 2^{ème} etc.

Cette remarque explique la terminologie anglo-saxonne : «enumerable» pour «dénombrable».

Exemple 2 : \mathbb{N} lui-même (évidemment bien sûr)

Exemple 3 : l'ensemble des nombres pairs

Exemple 4 : l'ensemble des nombres premiers

Exemple 5 : l'ensemble des carrés parfaits
etc.

MAIS AUSSI :

Théorème 16 : \mathbb{Z} est dénombrable

Démonstration : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots\}$

Théorème 17 : \mathbb{Q} est dénombrable

Démonstration : Compte tenu de la méthode entr'aperçue dans la démonstration du théorème 16, il suffit de savoir démontrer que \mathbb{Q}_+^* est dénombrable.

Ecrivons la liste de tous les éléments de \mathbb{Q}_+^* , et barrons les «double emplois».

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	8/2
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5	8/5
1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6	8/6
1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7	8/7
1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8

Réécrivons cette liste, qui ne comporte plus maintenant que des fractions irréductibles (chaque élément de \mathbb{Q}_+^* est écrit une fois et une seule) :

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1
1/2	2/3	3/2	4/3	5/2	6/5	7/2	8/3
1/3	2/5	3/4	4/5	5/3	6/7	7/3	8/5
1/4	2/7	3/5	4/7	5/4	6/11	7/4	8/7
1/5	2/9	3/7	4/9	5/6	6/13	7/5	8/9
1/6	2/11	3/8	4/11	5/7	6/17	7/6	8/11
1/7	2/13	3/10	4/13	5/8	6/19	7/8	8/13
1/8	2/15	3/11	4/15	5/9	6/23	7/9	8/15

Ecrivons $\mathbb{Q}_+^* = \{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 5, \dots\}$

On a bien réussi à «indexer» les éléments de \mathbb{Q}_+^* par les entiers.

Exercice 3 : 1) La réunion de 2 ensembles dénombrables est dénombrable

2) La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

3) Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème 18 : \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Démonstration : On va montrer en fait que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe une bijection $u : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1]$

On aura alors $[0, 1] = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$

Soit $y = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

où $a_1 \in \{0, \dots, 9\} - \{1^{\text{ère}} \text{ décimale de } u_1\}$

$a_2 \in \{0, \dots, 9\} - \{2^{\text{ème}} \text{ décimale de } u_2\}$

.....
 $a_n \in \{0, \dots, 9\} - \{n^{\text{ième}} \text{ décimale de } u_n\}$

etc.

On a clairement $y \in [0, 1]$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*, y \neq u_n$

ce qui prouve que y n'est pas dans la liste, contradiction.

Complément :

Définition 16 : Un nombre réel est dit algébrique ssi il est racine d'une équation polynomiale à coefficients dans \mathbb{Q} .

Par exemple, $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont algébriques

Définition 17 : Un nombre réel est dit transcendant ssi il n'est pas algébrique.

Par exemple, e est transcendant (Hermite, 1873)

π est transcendant (Lindemann, 1882),

mais cela n'est pas facile à démontrer.

[voir par exemple Stewart : «Galois Theory» ou Gozard : «Théorie de Galois»].

Attention : En dehors de ces deux exceptions qui confirment la règle, la plupart des démonstrations qui traînent dans la littérature sont fausses.

Il est assez facile de voir (exercice) que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Comme \mathbb{R} lui-même ne l'est pas, c'est donc qu'il existe quelque part des nombres transcendants.

Remarque 11 historique : C'est ainsi que Georg Cantor parvint à démontrer, en 1874, l'existence de nombres transcendants, sans avoir besoin d'en exhiber un seul.

En fait, on peut démontrer qu'en un certain sens, il y a autant de nombres transcendants que de nombres réels.

6.2 Parties denses dans \mathbb{R}

Définition 18 : A est dense dans \mathbb{R} ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, A \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset$$

[Il y a au moins un élément de A aussi près que l'on veut de tout nombre réel].

Proposition 2 : A est dense dans \mathbb{R} ssi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x .

Démonstration : à peu près triviale.

Théorème 19 : \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x = m, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

$$\text{posons } x_n = m, a_1 a_2 \dots a_n$$

Il est clair que $x_n \in \mathbb{Q}$ et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Remarque 12 : De même, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} .

Dans tout intervalle non vide, il y a une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\text{On suppose que } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que f est linéaire

$$\text{i.e. } \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$$

Exercice 5 (Curiosité) : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie :

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x) = 0$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ irréductible, } f(x) = \frac{1}{q}$$

Etudier la continuité de f sur $[0, 1]$.

Exercice 6 : Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit discret, soit dense.