Chap. 10 :

Cardinaux

1 Le théorème de Cantor-Bernstein

Définition 1 : *A, B 2 ensembles*
(1) $A \leq B$ ssi il existe une injection de A dans B.
(2) $A \approx B$ ssi il existe une bijection de A sur B.
(3) $A \prec B$ ssi $A \leq B$ et $\neg(B \leq A)$

Proposition 1 : *$\leq$ est une relation réflexive et transitive.*
$\approx$ est une relation d'équivalence.

Démonstration : Clair.

Théorème 1 *de Cantor-Bernstein : $(A \leq B \wedge B \leq A) \Rightarrow A \approx B$*
[S'il existe une injection de A dans B et s'il existe une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A sur B].

Autrement dit, la relation $\leq$ sur les cardinaux est antisymétrique (le cardinal de A étant provisoirement défini comme étant la classe d'équivalence de A pour la relation d'équipotence $\approx$).

Démonstration : $\left.\begin{array}{l} f : A \to B \\ g : B \to A \end{array}\right\}$ inj.

On pose $\left\{\begin{array}{l} A_0 = A \\ B_0 = B \end{array}\right.$

et, pour tout entier n, $\left\{\begin{array}{l} A_{n+1} = g(B_n) \\ B_{n+1} = f(A_n) \end{array}\right.$

Il est clair que les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes.
On pose alors

$$A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$B_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

$$\textit{et } C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_{2n} \backslash A_{2n+1})$$

et on définit $h : A \to B$ de la façon suivante :
Si $x \in C$, $h(x) = f(x)$
Si $x \notin C$, $h(x) = g^{-1}(x)$

→ h est bien définie sur A :
*Si $x \in C$, pas de problème.
**Si $x \notin C$,

$$x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{2n} \backslash A_{2n+1})$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \notin (A_{2n} \backslash A_{2n+1})$
en particulier,

$$\left.\begin{array}{c} x \notin A_0 \backslash A_1 \\ \text{mais } x \in A_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in A_1 \Rightarrow x \in g(B)$$

donc $g^{-1}(x)$ existe, et est unique car g inj.

→ h est une bijection de A sur B :
On vérifie que h envoie bijectivement :
$A_0 - A_1$ sur $B_1 - B_2$
$A_1 - A_2$ sur $B - B_1$

$A_2 - A_3$ sur $B_3 - B_4$
$A_3 - A_4$ sur $B_2 - B_3$

$A_{2n} - A_{2n+1}$ sur $B_{2n+1} - B_{2n+2}$
$A_{2n+1} - A_{2n+2}$ sur $B_{2n} - B_{2n+1}$

et A_∞ sur B_∞

Or, $A_0 - A_1$, $A_1 - A_2$, $A_2 - A_3$, ..., $A_p - A_{p+1}$, ..., A_∞ constituent une partition de A, idem pour B, ce qui prouve bien que h est une bijection de A sur B.

Nous allons voir maintenant une application GIGANTISSIME du théorème de Cantor-Bernstein.

Corollaire 1 *:* $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$

Démonstration : On va montrer en fait que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx]0,1[$
[Il est par ailleurs trivial que $]0,1[\approx \mathbb{R}$
prendre $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \ln\big(\tan(\frac{\pi}{2}x)\big)$].

→ Montrons d'abord qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $]0,1[$:
Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
1) Ecrire les éléments de A dans l'ordre croissant
$A = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$
2) Les traduire en base 8 :
$A = \{b_0, b_1, ..., b_n, ...\}$
3) On pose $f(A) = 0, b_0 8 b_1 8 ... b_n 8 ...$

→ Montrons maintenant qu'il existe une injection de $]0,1[$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
Soit $x \in]0,1[$
1) Ecrire le développement de x en base 8 :
$x = 0, a_0 a_1 a_2 ... a_n ...$ avec $a_n \in \{0, 1, 2, ..., 7\}$
2) Ajouter 1 à chaque chiffre :
$y = 0, b_0 b_1 b_2 ... b_n ...$ avec $b_n \in \{1, 2, 3, ...8\}$
3) On pose $g(x) = \{b_0, b_1 b_2, b_3 b_4 b_5, ...\}$

2 Définition de la cardinalité

Définition 2 *: Soit A un ensemble.*
A est bien ordonnable ssi $\exists R$, R est un bon ordre sur A.

Soit A un ensemble bien ordonnable.
$\langle A, R\rangle$ est donc un ensemble bien ordonné
D'après le théorème fondamental (Chap.4 §II théorème 3), il existe un ordinal α tel que $\langle A, R\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$
en particulier, $A \approx \alpha$
d'où

Théorème 2 *: Tout ensemble bien ordonnable peut être mis en bijection avec un ordinal.*

Soit alors $C = \{\alpha : \alpha \text{ ordinal et } A \approx \alpha\}$
D'après le théorème, $C \neq \emptyset$
donc, C possède un plus petit élément.

Définition 3 *: On appelle cardinalité de A, et on note $Card(A)$ ou $|A|$, le plus petit ordinal α tel que $A \approx \alpha$*

Exemple 1 *: $Card\,\emptyset = 0$*
$\forall n \in \omega, Card\, n = n$
$Card\,\omega = \omega$
$Card\,\mathbb{Z} = \omega$
$Card\,\mathbb{Q} = \omega$
$Card(\omega + 1) = Card(\omega + 7) = Card(\omega \times 2) = Card(\omega^2) = Card(\omega^\omega) = \omega$

Remarque 1 *: Si $\mathbb{R}$ est bien ordonnable, alors $Card\,\mathbb{R} = Card\,\mathcal{P}(\omega)$*
et $Card\mathbb{R} > \omega$ (car on a vu au chap.3 que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable).
donc $Card\,\mathbb{R} \geq \omega_1$

Remarque 2 *: Pour l'instant, toutes ces considérations ne sont que des hypothèses, car on ne sait pas si $\mathbb{R}$ est bien ordonnable, donc on ne sait pas si $\mathbb{R}$ possède une cardinalité.*

Remarque 3 *: $A \approx B \Rightarrow |A| = |B|$*
(pour les ensembles bien ordonnables)
et, en particulier, $|A| \approx A$.
Pour les ensembles bien ordonnables, la cardinalité fournit donc un représentant de chaque classe d'équivalence pour la relation d'équipotence $\approx$ (ce représentant étant choisi parmi les ordinaux).

3 Notion de cardinal

Définition 4 *: Un cardinal est un ordinal qui ne peut pas être mis en bijection avec un ordinal plus petit.*

Définition 5 *équivalente : (α est un cardinal) ssi (α est un ordinal et $\alpha = |\alpha|$)*

Exemples :

Proposition 2 *: ω est un cardinal et $\forall n \in \omega$, n est un cardinal.*

Démonstration : C'est évident.

Proposition 3 *: L'ordinal ω_1 construit au Chap.9 est un cardinal.*

Démonstration : par construction même.

Définition 6 *: A est fini ssi $|A| < \omega$*
A est dénombrable ssi $|A| \leq \omega$

Remarque 4 *: On n'aurait pas pu,sur la base des axiomes 0 à 7 (c'est-à-dire sans supposer le Power Set) démontrer l'existence d'un cardinal non dénombrable.*

[Pour être plus précis, la théorie composée des axiomes 0 à7, et augmentée de l'axiome supplémentaire «Tout est dénombrable» a la même consistance que ZF].

4 La hiérarchie des cardinaux transfinis

Nous allons reprendre ici la hiérarchie des ordinaux «particuliers» introduite au Chap.9.

Définition 7 *: pour tout ordinal (et donc pour tout cardinal) α, on définit l'ordinal α^+ par :*
$\alpha^+ = Min\,\{\beta : \beta \text{ ordinal et } Card\,\beta > Card\,\alpha\}$

Il résulte immédiatement de la définition le théorème suivant

Théorème 3 *: α^+ est un cardinal et $\alpha^+ > Card\,\alpha$*
(en tant que cardinaux).

Définition 8 *: κ étant un cardinal, on dit que κ est un cardinal successeur ssi $\exists\alpha, \kappa = \alpha^+$*
κ est un cardinal limite ssi $\kappa > \omega$ et κ n'est pas un cardinal successeur.

On peut maintenant définir la hiérarchie de TOUS les cardinaux transfinis.

Définition 9 *: $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ est défini par récurrence transfinie sur α de la façon suivante :*
(1) $\omega_0 = \omega$
(2) $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$
(3) Si γ ordinal limite, $\omega_\gamma = Sup\,\{\omega_\alpha : \alpha < \gamma\}$

Lemme 1 *: (1) Tout ω_α est un cardinal.*
(2) Tout cardinal infini est égal à ω_α pour un certain ordinal α.
(3) $\alpha < \beta \Rightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta$
(4) ω_α est un cardinal limite ssi α est un ordinal limite.
ω_α est un cardinal successeur ssi α est un ordinal successeur.

Démonstration : Ces différentes propositions découlent directement de la définition.

Remarque 5 *: Dans certains ouvrages, on privilégie la notation «aleph alpha» ($\aleph_\alpha$) pour désigner l'objet ω_α en tant que cardinal, mais il est bien évident que les symboles $\aleph_\alpha$ et ω_α désignent le même ensemble.*

5 Les problèmes

On a vu que ω_1 est le plus petit ordinal non dénombrable, et on sait par ailleurs que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Il paraît donc évident que $\mathbb{R}$ est «au moins aussi gros» que ω_1. On va voir que c'est vrai «dans un certain sens».

Théorème 4 *: Il existe une surjection de $\mathbb{R}$ sur ω_1.*

Démonstration : Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable

(reprendre par exemple la démonstration «diagonale» du fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable pour le cas d'un produit de 2 ensembles, puis conclure par récurrence).

Il existe donc une bijection de ω sur $\omega \times \omega$.

Par là-même, on en déduit l'existence d'une bijection de $\mathcal{P}(\omega)$ sur $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$, donc de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$, et on va montrer l'existence d'une surjection de $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$ sur ω_1, ce qui achèvera la démonstration.

Soit $R \in \mathcal{P}(\omega \times \omega)$

Si R est un bon ordre sur ω, on pose $\varphi(R) = Type\ \langle \omega, R \rangle$

Sinon, on pose $\varphi(R) = \omega^2 + 27$

On a vu (Chap.9, §II, théorème 3) que tout ordinal dénombrable ξ est le type d'ordre d'un bon ordre sur ω, ce qui assure la surjectivité de φ.

....

Soit.

....

Ce théorème tend à prouver que $\mathbb{R}$ est «plus gros» que ω_1. Malheureusement, en l'absence d'un axiome supplémentaire, il est impossible de démontrer l'existence d'une injection de ω_1 dans $\mathbb{R}$. Comme, par ailleurs, on ne sait pas si $\mathbb{R}$ est bien ordonnable, il n'a peut-être pas de cardinalité, si bien que le «continu», c'est-à-dire le fait, pour un ensemble, d'être équipotent à $\mathbb{R}$, peut très bien n'avoir aucun rapport avec la hiérarchie ω, ω_1, ω_2, ..., ω_ξ, ... précédemment définie.

Afin de remettre un peu d'ordre dans cette gabegie apparente, le plus simple serait de supposer, une bonne fois pour toutes, que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre. Reste à savoir si cet axiome supplémentaire a des chances d'être «raisonnable», et surtout de ne pas mener à des contradictions.

Gödel a démontré que, si la théorie des ensembles est consistante (par exemple la théorie ZF formée des axiomes 0 à 8), alors il en est de même de la théorie des ensembles augmentée de l'axiome «Tout ensemble peut être bien ordonné».

Comme nous n'avons pas les moyens de reproduire cette démonstration ici, nous allons nous contenter de démontrer que cet axiome est équivalent à d'autres postulats aussi «raisonnables», et en déduire quelques conséquences très classiques.