Fondements des mathématiques

Sylvain Poirier
sylvainpoirier.fr/logique

1 bis. Perspectives métamathématiques

A. Théorèmes de complétude et d'incomplétude

Ce sont deux théorèmes essentiels des fondements des mathématiques, découverts par Kurt Gödel. En voici une version résumée (les détails étant trop difficiles à ce stade; ils ne sont pas rigoureusement nécessaires pour la suite, mais aident à préciser certaines perspectives des fondements).

Une preuve (ou démonstration) d'une formule dans une théorie, est un système fini (modèle d'une certaine théorie des démonstrations), déduisant cette formule de certains axiomes (en nombre fini).

Une formule est dite démontrable s'il en existe une démonstration; réfutable, si sa négation est démontrable; indécidable, si elle n'est ni démontrable ni réfutable.

Une théorie est contradictoire si (faux) y est démontrable; sinon elle est dite consistante.

Le théorème de complétude fait la force de la théorie des modèles, établissant l'équivalence entre réalisme et formalisme pour les théories génériques. Etabli pour un formalisme particulier, il rend la notion de démontrabilité parfaite et indépendante du choix du formalisme de même qualité:

Théorème de complétude. *Dans un cadre ensembliste admettant $\mathbb{N}$, toute théorie générique non contradictoire dont les symboles sont numérotables (ou sinon avec l'axiome du choix) a un modèle.*

Preuve. Soit une théorie consistante. On traduit chaque axiome comme suite de quantificateurs exercée sur une formule sans variable liée. On remplace chaque occurence de $\exists$ dans un axiome, par un nouveau symbole d'opérateur. On ajoute une par une aux axiomes (suivant un ordre arbitraire dont dépendra le résultat) chaque formule (formée d'un symbole de prédicat appliqué à des termes) non contredite par les axiomes précédemment admis, en sorte de toutes les déterminer en vrai ou faux sans introduire de contradiction. Alors l'ensemble de tous les termes forme un modèle. $\square$

Ainsi pour tout énoncé non réfutable dans une théorie donnée, il existe un modèle de la théorie qui le satisfait aussi. Et donc, toute vérité universelle d'une théorie (énoncé vrai dans tous ses modèles) est démontrable suivant le système général connu de règles de démonstration.

Mais il peut n'y avoir qu'une infinité de modèles, sans qu'aucun de ceux ainsi construits ne soit naturel; la démontrabilité, dont dépend cette construction, peut être indécidable (une preuve non trouvée risquant de n'avoir pas été assez cherchée). De fait, pour des théories fondatrices, aucune spécification des valeurs des formules closes (comme celle donnée par un modèle spécifique), ne peut refléter de réalité idéale de ces valeurs:

Théorème de Tarski. *Soit un modèle M d'une théorie T contenant les données invariantes de:*
– une théorie T' où toute expression F de T est traduisible en $[F]$ de T' de manière méta-invariante,
– un prédicat unaire (sous-classe) v sur la classe des formules closes de T',
Alors il existe une formule close valide G de T, telle que $G \not\Leftrightarrow v[G]$.

Preuve. Pour toute expression F de T, supposons sa traduction $[F]$ dans T' désignée comme valeur d'un terme clos t_F de T (de complexité liée à celle de F). Supposons de plus donné un terme J de T à une variable libre, tel que pour toute expression F de T on ait $J[F] = [t_F]$.

Pour toute formule A de T' à une variable libre, et tout terme clos K de T', notons $(A : K)$ la formule close de T' obtenue en remplaçant A par K. Notons $H(A)$ la formule non $v(A : J(A))$, de variable A dans la classe des formules de T' à une variable libre. Enfin on définit la formule G (comme Gödel) par $H(t_H)$. Alors $[G] = ([H] : J[H])$ de sorte que la conclusion en résulte. $\square$

Corollaire. *Toute complétion de T obtenue par ajout successif des formules irréfutables suivant un ordre explicite, interprètera incorrectement le concept de démontrabilité dans T'.*

Preuve. Le v défini par cette complétion est en désaccord avec M au sujet de G, donc aussi de $v[G]$ (la formule $G \not\Leftrightarrow v[G]$ étant aussi vraie pour v), et donc, par définition de $v[G]$, aussi sur la démontrabilité des formules de la théorie objet. Enfin, si M l'interprète correctement (et donc interprète bien v comme annoncé), alors v l'interprète incorrectement. $\square$

Lemme. *Pour tout modèle M' contenu dans un modèle M d'une même théorie fondatrice T, toute formule A démontrable comme objet de M l'est aussi comme objet (traduit) dans M'.*

Preuve 1. Si A est indémontrable dans M' alors M' contient un modèle M" où A est faux. Mais alors M" est aussi dans M, donc A est indémontrable dans M.
Preuve 2. Toute preuve de A dans M étant finie pour M, est recopiable dans M' par récurrence.
Preuve 3. Toute preuve est convertible en preuve de l'existence d'une preuve. $\square$

Pas de réciproque: une preuve dans M' est un modèle de la théorie des démonstrations fini pour M', mais peut s'avérer infini pour M et donc ne plus y être une preuve.

Théorème d'incomplétude. *Si v est la démontrabilité des formules de T' et si $v[X]$ est vérifié pour tous les axiomes X de T assurant cette définition de v, alors G équivaut à la consistance de T'.*

Preuve. $v[G] \Rightarrow v[v[G]] \Rightarrow v[\text{non}\, G]$. Or $v[\text{faux} \Rightarrow G]$. Donc $(\text{non}\, G) \Leftrightarrow v[G] \Leftrightarrow v[\text{faux}]$. □

Avec une "bonne théorie" T et un "bon modèle" où T' représente fidèlement T, ce G est vrai.

Comme $G \Leftrightarrow$ ($[G]$ indémontrable) $\Leftrightarrow$ ($\exists M'$ modèle de T' où $[G]$ est faux), tout modèle où ces 3 formules sont vraies en contient un autre où elles sont fausses. Ainsi, la consistance d'une théorie et l'existence d'un modèle, quoi qu'équivalents, peuvent être indécidables (sans qu'on le sache, sinon on les saurait vrais). Aucune théorie consistante ne peut prouver sa propre consistance.

Ainsi nulle théorie fondatrice T' ne pourra se désigner elle-même en donnant aux représentations comme objets de toutes ses propres formules closes leur valeur correcte (conforme à leur expression directe). Donc toute théorie T fondant T' sera soit effectivement différente (soit par le langage, soit par la valeur des formules closes), soit incapable de spécifier la valeur de toutes les formules closes valides de T'. D'où une pluralité de modèles non équivalents (soit horizontale, soit verticale).

B. La métaphore temporelle des fondements

Réexprimons plus intuitivement ces manières dont le monde mathématique peut se penser lui-même, par analogie avec la pensée humaine décrite en langage courant.

Nous avons abordé les objets mathématiques, et le langage pour en parler. Ainsi nous parlons de tout, et aussi d'autre chose. Car même en voulant parler de tout, il restera autre chose qui y échappera, dont déjà le fait même d'en parler. Ce dont on a pourtant bien su parler aussi. Alors ?

Un propos ne peut pas parler de lui-même et de "ce dont je parle" comme si cette formule était déjà précise en soi, puisqu'elle ne l'est pas, pouvant désigner n'importe quoi. Et cela devient absurde si c'est pour modifier ou contredire ce sens. Je peux bien parler de "ce que dont j'ai parlé à tel moment", ce qui a bien un sens si ce propos passé en avait un, car j'en avais saisi le sens et je m'en souviens.

Mais si j'invoque "ce dont je parlerai demain", même en sachant ce que je dirai, cela n'en donnerait pas encore le sens: non seulement le cas où je parlerais de "ce dont j'ai parlé hier", c'est-à-dire maintenant, créerait un cercle vicieux de signification; mais même une forme syntaxique garantissant sa validité, ne suffirait pas à donner effectivement ce sens. J'aurais beau spéculer sur son sens possible, sa vraie interprétation nécessitera de réellement exprimer ce propos dans son contexte, pour en expérimenter la signification et la posséder. Faute d'intérêt à parler de propos sans leur signification, mieux vaut ignorer les propos futurs, et n'étudier que les propos passés.

Ainsi toute théorie est comparable à un travail d'historien: traitant d'un univers fait d'une totalité passée, ce discours se produit lui-même en un présent extérieur à cet univers. Ceci n'empêche pas l'étude du langage en général, car l'univers du passé dont je peux parler aujourd'hui inclut non seulement l'univers dont je pouvais parler hier, mais aussi les propos que j'ai pu tenir à leur sujet et leur signification. Je peux donc parler aujourd'hui de choses extérieures à l'univers de ce dont je pouvais parler hier. Or, depuis hier, je n'ai pas appris à parler le martien ni n'ai acquis une nouvelle intelligence transcendantale; mais la même intelligence et le même langage s'appliquent à un univers plus grand, enrichi de nouveaux objets. Ces nouveaux objets étant semblables aux précédents, mon univers d'aujourd'hui peut ressembler à mon univers d'hier, mais pas complètement. D'un univers à l'autre, des copies d'un même énoncé peuvent avoir un sens différent.

C. Le paradoxe de Zénon comme métaphore de la théorie des ensembles

Rappelons le paradoxe de Zénon: Achille poursuit une tortue en courant 100 fois plus vite; à chaque fois qu'il parcourt la distance qui le sépare de la tortue, celle-ci prend une nouvelle longueur d'avance, de sorte qu'Achille ne la rattrappe jamais. Une idée analogue est celle de l'horizon représentant l'infini: un objet qui s'éloigne s'approche de l'horizon mais ne l'atteint jamais.

Chaque exemple se base sur une double interprétation: l'une voit une extrémité atteignable, l'autre l'exclut en ne considérant que ce qui la précède, pouvant avancer indéfiniment sans jamais l'atteindre. Chacun de ces 2 exemples a une seule "vraie" interprétation dictée par une mesure physique. Mais pour des univers mathématiques où tout n'est que rôles joués en l'absence de nature propre, les 2 interprétations peuvent être également valables faute de mesure objective pour les départager.

Chaque théorie générique se présente comme un tout achevé, où l'univers que parcourent ses variables existe comme méta-ensemble, et toute conséquence des axiomes est démontrable. Or toute théorie capable de fonder cette théorie se situera nécessairement au-delà de ce tout, sans pouvoir s'y ramener. D'où le besoin d'une théorie ouverte du fondement des mathématiques intégrant chaque étude d'un univers passé comme objets d'un univers ultérieur, formant une succession illimitée de réalités de plus en plus grandes.

La théorie des ensembles est ainsi ouverte, produisant des objets hors de chaque ensemble donné. Comme tout système ouvert équivaut à un système achevé privé de son extrémité, elle diffère de sa traduction en théorie générique par ses restrictions d'usage des quantificateurs ouverts. Elle a de nombreuses variantes possibles. Il faut d'abord choisir un langage spécifiant les rôles plus ou moins élaborés des objets, d'ailleurs développables par définitions internes. Puis il lui restera toujours une infinité d'énoncés indécidables, reflétant la diversité de ses modèles possibles.

Les modèles se classent par leur *force*, mesure de leur extension apparente dans une certaine hiérarchie des formes d'infinités (définies par les énoncés clos, et que la preuve du théorème de complétude réduit à des structures différentes sur de semblables infinités de termes servant d'objets). Car tout modèle une fois présenté comme ensemble achevé, avec sa dynamique interne contenue dans une éternité passée, se trouve englobé dans un autre qu'on dira de force supérieure au premier.

Les axiomatiques ensemblistes se classent également par leur force, définie comme force minimale que chacune exige de ses modèles. Les axiomes sont normalement conçus pour y contribuer sans la limiter, excluant aussi seulement certains intermédiaires entre forces autorisées. Cette force d'une théorie des ensembles lui permettra d'assembler ses objets en théories et modèles, puis de produire entre ceux-ci la dynamique recherchée. Nous détaillerons les rares axiomes cruciaux garantissant la force utile en pratique et déterminant l'essentiel des questions de mathématiques courantes.

La première théorie des ensembles, de Zermelo, suffisait presque à fonder les mathématiques de base; à part l'axiome du choix, elle ne manquait que d'équivalents raisonnables de certains usages des opérateurs et du définisseur de fonctions. Ce manque fut comblé par l'axiomatique ZF, avec son schéma de remplacement et son usage massif des quantificateurs ouverts. Nous montrerons ultérieurement comment la lecture naïve usuelle de ce schéma viole le sens des quantificateurs ouverts et de la distinction entre ensembles et classes; et quelle interprétation beaucoup plus subtile peut vraiment le justifier comme donnant une force vertigineuse à la théorie sans contradiction.

Cette force dépasse encore celle où l'infinité des univers emboités épuise les moyens pour tout énoncé (même paramétré) d'en repérer la progression. En effet, à tout instant t satisfaisant ZF, tout énoncé dont la valeur ne s'est pas stabilisée avant t sur sa valeur en t (le théorème de Tarski en fournit), vient d'alterner indéfiniment ses valeurs juste avant t (au cours de la succession infinie d'univers précédents dont l'union est celui en t), aucun donc ne s'étant stabilisé sur la valeur opposée. D'où l'impossiblité de détecter l'ordre entre tous les univers intermédiaires au moyen d'énoncés.

Alors que l'interprétation des variables et expressions d'une théorie générique suppose la fixation d'un modèle, le caractère ouvert d'une théorie des ensembles traduit son ambition à décrire ses objets indépendamment de l'étendue de l'univers, qui reste indéterminée. Son universalité se fonde sur la reconnaissance de la subjectivité, renonçant à certaines questions globales irrésolues comme possiblement vaines car dépendantes de l'univers, au profit de celles effectivement résolubles et donc inaffectées par la croissance de l'univers (seulement contrainte par les axiomes choisis).

D. Interprétation des classes

Dans chaque univers possible $\mathcal{U}$, une classe $\mathcal{C}$ s'interprète comme partie de $\mathcal{U}$ (méta-ensemble d'objets) par compréhension, $P = \{x \in \mathcal{U}|\mathcal{C}(x)\}$; on dit que $\mathcal{C}$ est un ensemble lorsque ce P a les mêmes éléments qu'un objet "ensemble" dans $\mathcal{U}$. Sinon, le méta-ensemble P, qui n'existait pas encore comme ensemble dans $\mathcal{U}$, est en train de naître à l'existence, et existera désormais comme ensemble appartenant aux univers suivants. Mais il n'en va généralement pas de même pour $\mathcal{C}$.

En effet comme P dépend de $\mathcal{U}$, il peut s'enrichir lorsque $\mathcal{U}$ grandit, de tout nouvel objet x satisfaisant $\mathcal{C}(x)$. Seulement s'il n'apparaît pas ou plus de tels objets, laissant P définitivement constante, la classe $\mathcal{C}$ demeure identifiable au même P, et donc acquiert ou préserve le statut d'ensemble égal à P. Dans le cas contraire où $\mathcal{C}$ vient à différer du premier P, elle perd alors son éventuel statut initial d'ensemble égal à P, même si elle pourra encore s'identifier à un autre ensemble ultérieurement, à tort ou à raison.

Ainsi considérant un univers variable, la qualité d'ensemble de $\mathcal{C}$ se définit par la constance de P; tandis que l'originalité de la notion de classe au-delà des ensembles, réside dans la possible variabilité de P lors de la croissance de $\mathcal{U}$, par apparition de nouveaux éléments satisfaisant $\mathcal{C}$ hors de l'univers d'un instant donné; ceci obligeant à relativiser l'identification de $\mathcal{C}$ à P dans un univers donné, comme subjective et possiblement illusoire. Ainsi, pour une classe, la qualité d'ensemble signifie l'affirmation (ou garantie) que tout objet non encore considéré (n'existant pas encore dans l'univers d'un instant donné) en sera toujours exclu quand il surviendra; tandis que les autres classes restent capables de contenir des éléments qui n'existent pas encore mais pourront satisfaire la propriété.

Mais si à la variation de $\mathcal{U}$ on donne finalement un domaine fixé, l'effet de cette variation pour son rôle d'interprétation des variables, des quantificateurs ouverts, et de la distinction des ensembles parmi les classes, se résume au point de vue de l'univers fixe $\mathcal{U}'$ union des valeurs de $\mathcal{U}$. En effet, l'interprétation dans $\mathcal{U}'$ de l'énoncé qualifiant une classe $\mathcal{C}$ comme ensemble $(\exists E, \forall x, \mathcal{C}(x) \Leftrightarrow x \in E)$, équivaut à dire que lors de la succession des $\mathcal{U}$, "il existe un temps après lequel P est constant". Avec donc pour avantage, de ne pas se fier au premier univers venu.

Dès lors, la méta-variable $\mathcal{U}$ (et donc aussi P pour toute classe donnée) doit être comprise comme ayant pour domaine idéal non un ensemble mais une classe (en un sens à préciser)...

E. Sens des quantificateurs ouverts

Comme annoncé, les formules (à quantificateurs bornés) ont toujours un sens (valeur booléenne) bien défini une fois fixés les variables libres et le contenu de chaque ensemble utilisé, indépendamment du reste de l'univers; mais celui des énoncés peut varier suivant l'extension de l'univers au-delà. Ainsi, un énoncé universel $(\forall x, \ldots)$ vrai "maintenant" (dans un univers), pourrait devenir faux "ensuite" (un x contre-exemple pourrait survenir au-delà). Son affirmation "dans tous les univers" serait relative à un domaine de variation de l'univers, et se réduirait à son interprétation dans l'union de ces univers.

C'est pourquoi les énoncés ne seront invoqués que pour affirmer leur véracité sur les univers étudiés, par choix (axiomes, sélectionnant les univers acceptés) ou par déduction (théorèmes): $\exists x, P(x)$ signifie que chacun des univers acceptés contient un x tel que $P(x)$, et de même pour $\forall$.

Les autres énoncés, indéterminés, n'auraient de signification que contingente (relative, seulement valable "ici et maintenant"), dépendant de l'univers parmi ceux acceptés par les axiomes. Ils ne sont pas normalement utilisables pour définir un ensemble par compréhension. Cette indétermination n'est prise en compte que par évitement et non pas affirmativement (pouvant être elle-même indéterminée, indémontrable, le panorama d'univers possibles restant inconnu).

Suivant le théorème de complétude, l'indétermination de valeur des énoncés, liée à la multiplicité des univers possibles, reflète exactement les limites de la prouvabilité formelle. La prouvabilité d'un énoncé, équivaut au fait que "sa négation entraine une contradiction", où la négation échange les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ également s'ils sont ouverts; et chacun d'eux se traduit formellement suivant les règles d'usage des quantificateurs que nous avons énoncées, exactement comme avec les théories génériques. Ainsi, on a 4 cas: soit seul $\exists x, P(x)$ est prouvable, soit seul $\forall x, \text{non}\, P(x)$ est prouvable, soit ni l'un ni l'autre (indécidable), soit la théorie est contradictoire (ce qu'on souhaite éviter).

Une preuve de $\forall x, \text{non}\, P(x)$ est une preuve de $\text{non}\, P(x)$ (où la variable libre x fut introduite sans hypothèse) et revient à ce que l'hypothèse $P(x)$ (donc, existentielle) entraine une contradiction.

Une preuve de $\exists x, P(x)$ est faite d'un terme t et d'une preuve de $P(t)$ (ou de termes $t, t', t'' \ldots$ et d'une preuve de $(P(t)$ ou $P(t')$ ou $P(t'') \ldots))$.

L'indécidabilité de $\exists x, P(x)$ peut venir d'univers $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ où l'énoncé est vrai seulement dans $\mathcal{U}'$, les objets x satisfaisant $P(x)$ étant tous hors de $\mathcal{U}$. Intuitivement, ces objets sont hors d'atteinte par des moyens déterminés (termes) ou non (usage d'autres axiomes d'existence de la théorie).

Mais il y a d'autres possibilités: certains univers où il est faux peuvent n'être pas extensibles en univers où il est vrai (satisfaisant encore les autres axiomes), et un univers où il est vrai ne contient pas nécessairement une classe d'objets x satisfaisant tous $\text{non}\, P(x)$, qui satisfasse tous les axiomes et préserve la valeur fausse des $P(x)$. (On ne peut pas toujours simplement éliminer des objets gênants en les effaçant, car il risquent de ressurgir d'une manière ou d'une autre). Ainsi, les différents univers possibles aux différentes propriétés ne se succèdent pas nécessairement dans le temps, mais peuvent correspondre à des dynamiques séparées et incompatibles.

En tout cas, l'indécidabilité de $\exists x, P(x)$ ne permet pas *dans cette théorie* d'introduire un objet (nouveau symbole de constante) x avec l'axiome $P(x)$, mais signifie que cet ajout donne une nouvelle théorie encore non-contradictoire. Puis la procédure de complétion de la théorie aboutira à un univers contenant un x satisfaisant $P(x)$ (aux propriétés souvent arbitraires suivant celles de x).

Pourquoi on ne peut pas définir de relation d'égalité entre classes

Tentons de définir l'égalité entre classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'après leurs éléments: $\forall x, \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \mathcal{B}(x)$. En particulier, tout énoncé universel $(\forall x, \mathcal{A}(x))$ exprimerait l'égalité de $\mathcal{A}$ à l'univers. Cette notion d'égalité entre classes serait donc sujette à la même indétermination de sens que le $\forall$ ouvert, et sera donc pareillement remplacée par sa démontrabilité: des classes ne seront déclarées égales que lorsque l'équivalence des formules a été démontrée. Les classes ne ressemblent donc vraiment pas à des objets.

F. Justification du principe de génération des ensembles

Soit X une formule de quantificateur, visant à exprimer $\exists$ sur une classe. En utilisant seulement $\text{non}(Xx, \text{faux})$, montrons que la classe $\mathcal{C}$ des y tels que $Xx, x = y$ (domaine du $\exists$), est un ensemble.

Pour tout y dans $\mathcal{C}$ on a $(Xx, x = y)$ mais non (Xx, faux). Or X ne dispose que de moyens fixés indépendants de y pour distinguer le prédicat $(= y)$ de la constante (faux): une formule finie, des variables liées à des ensembles, des paramètres fixés, fournissant les objets où le prédicat s'applique. Ces deux prédicats ne sont plus distinguables par ces moyens dès que y est un extraterrestre (objet non testé par cette formule). Donc y est un Terrien. Tous ses éléments étant Terriens, $\mathcal{C}$ est un ensemble. $\square$

Remarque: une classe ne pouvant pas contenir plus d'un élément, peut encore n'être pas un ensemble, si cet éventuel élément est inaccessible, rendant son existence indéterminée. Cette possibilité se trouve exclue par l'axiomatique ZF, qui n'accepte que les types d'étendue d'univers dans chacun desquels toute classe pas plus grande qu'un ensemble s'identifie à un ensemble. Cependant cette propriété formelle de chaque univers admis passe sous silence le point de vue dynamique: une classe peut apparaitre vide dans un univers $\mathcal{U}$ et découvrir son unique élément dans l'univers plus étendu $\mathcal{U}'$ (et donc s'identifier dans chacun à un ensemble) alors même que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ satisfont ZF. C'est pourquoi l'admission des petites classes garde sa part de sens et de vérité en dépit de son exclusion par ZF.

G. Un ensemble peut-il appartenir à lui-même ?

Le paradoxe de Russell utilise la classe des ensembles qui ne s'appartiennent pas. Mais, les ensembles réflexifs (s'appartenant) peuvent-ils exister ? Cette question est indécidable; voici pourquoi.

Si on éliminait de l'univers tout ensemble réflexif, ils ne seraient pas reconstructibles par la donnée de leurs éléments, mais il resterait à éliminer tout autre ensemble qui en contient, et ainsi de suite.

L'autre solution est de reconstruire l'univers en les évitant: chaque ensemble apparaît à un certain instant, formé d'éléments préexistants dans un certain “univers” (classe ou ensemble d'objets) encore incomplet, pour s'intégrer à l'univers suivant. Mais ne pouvant préexister à sa propre apparition, il ne pourra pas appartenir à lui-même non plus. Cette propriété étant indépendante du contexte, une union d'univers chacun dépourvu d'ensemble réflexif, n'en contiendra pas non plus.

Inversement, on peut créer des univers contenant des ensembles réflexifs, par le biais suivant:

Devinette: quelle est la différence entre:
– Un univers avec un élément pur x et un ensemble y tels que $x \in y$ et $y \notin y$;
– Un univers avec un ensemble x et un élément pur y tels que $x \in x$ et $y \notin x$?

Réponse: le rôle de l'ensemble contenant x mais non y, joué par y dans le premier univers, est joué par x dans le second.

L'inexistence d'ensembles réflexifs, est un cas particulier de l'axiome de fondation. Le concept de relation bien fondée, introduit au texte 3, permettra de comprendre cet axiome et de justifier sa consistance, par un raisonnement qui traduit plus formellement celui que nous venons d'effectuer. Mais cet axiome est aussi inutile que les ensembles dont il assure l'inexistence.

H. Remarque sur les logiques alternatives

La théorie des ensembles ici développée est conforme au concept d'ensemble quasi-universellement admis (ne faisant que l'approfondir). Mais d'autres concepts d'ensembles existent.

Ainsi, certains logiciens développent la “logique intuitionniste”, qui attribue à toute formule une incertitude comme nous avons présentée pour les énoncés, mais traitée comme modification de la logique booléenne pure (le rejet du tiers exclus, où non(non A) n'implique pas A), sans mention spéciale des quantificateurs comme source de cette incertitude. Ainsi la réunion de $\{0\}$ et de $]0,1]$ serait incluse dans, mais non égale à $[0,1]$. (Je n'ai trouvé aucun intérêt à ce formalisme).

D'autre part (réflexion personnelle), certaines propriétés de la théorie de la mesure (qui inclut la théorie des probabilités) seraient interprétables comme énoncés plus simples sur un autre type d'ensembles. Imaginons qu'on tire une variable aléatoire x dans $[0,1]$, en tirant successivement à pile ou face chacune de ses décimales binaires jusqu'à l'infini. Soit E le domaine de x, ensemble des nombres aléatoires dans $[0,1]$. Il est non vide puisqu'on peut effectuer des tirages aléatoires, obtenant des nombres réels qui existent. Alors, un autre nombre $y \in E$, tiré aléatoirement indépendamment de x n'a aucune chance d'être égal à x: $\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y$. Des variables décrivant indépendamment le même ensemble ne peuvent plus prendre la même valeur.

Mais dorénavant banissons ces idées bizarres et tenons pour aquises les notions classiques de domaine et d'ensemble telles que nous avons exposées.

I. Exemples concrets

Un ensemble: Reste-t-il un dodo à la Réunion ? Cette île est bien connue, régulièrement visitée. S'il y restait des dodos, dans quelque recoin où ils aient pu être, même si les recoins possibles sont nombreux et les visites peuvent être rares, depuis plus d'un siècle on n'aurait vraisemblablement pas manqué de les remarquer. Comme on n'en a pas trouvé, on peut conclure qu'il n'y en a plus. Ainsi en pratique la question a un sens, s'exprimant par un quantificateur borné.

Un ensemble ressemblant à une classe: Bertrand Russell a ainsi argumenté à propos de théologie : "Si je suggérais qu'entre la Terre et Mars se trouve une théière de porcelaine en orbite elliptique autour du Soleil, personne ne serait capable de prouver le contraire pour peu que j'aie pris la précaution de préciser que la théière est trop petite pour être détectée par nos plus puissants télescopes. Mais si j'affirmais que, comme ma proposition ne peut être réfutée, il n'est pas tolérable pour la raison humaine d'en douter, on me considérerait aussitôt comme un illuminé." Cette question a dans l'absolu un sens clair, sur une réalité bien définie (un ensemble), mais à laquelle on n'a pas d'accès pratique suffisamment complet pour établir la réponse, à cause de sa vaste taille.

Une classe: l'énoncé perd toute signification une fois étendu à tout l'univers: existe-t-il dans l'univers une théière orbitant une quelconque étoile ? Non seulement on ignore les dimensions de l'univers (et même s'il est fini), mais ses parties éloignées n'existent pas encore pour nous. En effet, des régions éloignées nous ne recevons que la lumière de temps plus anciens (voire avant la formation des étoiles pour le fond de rayonnement cosmique). Or d'après la théorie de la relativité cette limite des moyens d'observation traduit une propriéte fondamentale du temps: les évènements dont nous n'avons pas encore reçu la lumière, n'ont pas encore réellement eu lieu (par rapport à nous).

Un méta-objet: bien des débats ont prétendu porter sur l'"existence de Dieu". Mais l'existence ne qualifiant normalement que des objets, n'est-ce pas une grande confusion que de l'associer à ce qui serait plutôt un méta-objet ? Les apologètes concevaient-ils correctement leur propre thèse au-delà de ces mots ? Mais quels sont donc les *objets* de leur foi et de leur adoration ? Chaque monothéisme accuse chaque autre du péché d'idolatrie, ceux qui croient adorer Dieu ne vénérant en fait que des objets: des livres, histoires, idées, croyances, enseignements, attitudes, sentiments, erreurs, évènements, accidents, souffrances, maladies, catastrophes naturelles, souvent guère plus subtils que les antiques statues (qui étaient riches de leurs propres histoires et enseignements), et sans jamais en vérifier sérieusement (de peur de froisser Dieu) les qualités qui justifieraient leur supposée divinité.

Un évènement universel: le sacrifice rédempteur du Fils de Dieu. Il reste à préciser s'il y aurait eu la moindre différence (et laquelle) à ce qu'il eut lieu non sur Terre mais dans une autre galaxie, ou dans les plans de Dieu pour la Terre de l'an 3000 suivant nos imparfaites conventions.

Autre ensemble réduit à une classe... la classe F des filles n'est actuellement qu'incomplètement représentée par des ensembles: l'ensemble de celles présentes tel jour en tel lieu, celles utilisant tel site de rencontre et dont les paramètres satisfont tels ou tels critères, etc. Soient dedans les prédicats B de beauté à mon goût et C de convenance d'une relation avec moi. Quand j'essaie d'expliquer que

$$(\forall x \text{ dans } F, C(x) \Rightarrow B(x)) \text{ et (les } x \text{ dans } F \text{ tels que } B(x) \text{ sont rares et souvent indisponibles)},$$

la réaction fréquente est: "Crois-tu donc que la beauté est la seule chose qui compte ?", autrement dit

$$\text{Quoi,}(\forall x \in F, C(x) \Leftrightarrow B(x))????$$

et d'enchainer sur "Imagine que tu trouves une fille jolie mais bête ou de mauvais caractère, que feras-tu ?", formalisable par ($\exists x \in F, B(x)$ et non $C(x)$!!!), ou encore par (non($\forall x \in F, B(x) \Rightarrow C(x)$)!!!). Et de conclure par un énoncé de pure bonté: "Je suis sûr(e) que tu trouveras", autrement dit : "$\exists$ beaucoup de x dans F tels que $C(x)$". Sans oublier la condition nécessaire pour y parvenir: "Tu dois changer de manière de penser".

... **par l'absence de Dieu**... l'existence d'un humain actuellement sur Terre capable de recevoir des messages de Dieu aurait suffit à faire de F un ensemble: Dieu lui aurait alors signalé de m'envoyer par email l'adresse de ma future femme (et/ou la mienne à celle-ci).

... **et de tout substitut:** un système d'annonce de rencontres en ligne suffisamment performant (rapide à détecter et faire sélectionner tous les contacts possiblement les meilleurs parmi des millions d'utilisateurs), ouvert (gratuit), et adopté par tous, comme ce dont j'ai conçu le plan et qui s'ajouterait au projet exposé sur http://spoirier.lautre.net/trustedforum.html, suffirait à remplir la fonction ci-dessus. Mais il y a deux problèmes: l'un est que cela dépend de la prise de contact avec un/des programmeur(s) prêt(s) à implémenter ce projet, à quoi s'oppose le fait que la classe des programmeurs n'est actuellement pas non plus un ensemble; l'autre est que la diffusion de l'annonce du projet, qui aurait pu résoudre ce dernier point, est bloquée par la morale religieuse qui tient avant tout à préserver Dieu de tout risque de chômage afin d'assurer son salaire de louanges.