Fondements des mathématiques

Sylvain Poirier
sylvainpoirier.fr/logique

3. Correspondances de Galois

3.1. Notion de correspondance de Galois

Définition. *Pour tous ensembles ordonnés E, F, l'ensemble des correspondances de Galois décroissantes entre E et F (resp. croissantes de E vers F) se définit (notant F^- pour F d'ordre transposé) par*

$$\mathrm{Gal}(E,F) = \{(\perp,\top) \in F^E \times E^F | \forall x \in E, \forall y \in F, x <_E \top(y) \Leftrightarrow y <_F \perp(x)\} = {}^t\mathrm{Gal}(F,E)$$
$$\mathrm{Gal}^+(E,F) = \{(u,v) \in F^E \times E^F | \forall x \in E, \forall y \in F, x <_E v(y) \Leftrightarrow u(x) <_F y\} = \mathrm{Gal}(E,F^-)$$

Exemple fondamental. *Toute relation $R \subset X \times Y$ définit un $(\perp,\top) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(X),\mathcal{P}(Y))$ par*

$$\forall A \subset X, \perp(A) = \{y \in Y | \forall x \in A, x\ R\ y\} = \bigcap_{x\in A} \overrightarrow{R}(x)$$
$$\forall B \subset Y, \top(B) = \{x \in X | \forall y \in B, x\ R\ y\} = \{x \in X | B \subset \overrightarrow{R}(x)\}$$
$$\perp(\emptyset) = Y \qquad \top(\emptyset) = X$$

Preuve: $\forall A \subset X, \forall B \subset F, \quad A \subset \top(B) \Leftrightarrow A \times B \subset R \Leftrightarrow B \subset \perp(A)$. □

Nous montrerons plus loin que c'est une bijection : $\mathrm{Gal}(\mathcal{P}(X),\mathcal{P}(Y)) \cong \mathcal{P}(X \times Y)$.

Lemme. $\forall \perp \in F^E, !\top \in E^F, (\perp,\top) \in \mathrm{Gal}(E,F)$.

Preuve: $\forall \top \in E^F, (\perp,\top) \in \mathrm{Gal}(E,F) \Leftrightarrow \overleftarrow{<}_E \circ \top = \perp^* \circ \overrightarrow{<}_F$, or $\overleftarrow{<}_E$ est injective. □

Pour tous $(\perp,\top) \in \mathrm{Gal}(E,F)$ et tous $f \in E^G, g \in F^G$, on a $f < \top \circ g \Leftrightarrow g < \perp \circ f$.

Notion de clôture et propriétés. *Soit $(\perp,\top) \in \mathrm{Gal}(E,F)$, et $\mathrm{Cl} = \top \circ \perp \in E^E$, $\mathrm{Cl}' = \perp \circ \top \in F^F$ appelées les clôtures associées à cette correspondance de Galois. Alors*
1) Cl *et* Cl' *sont extensives.*
2) $\perp$ *et* $\top$ *sont décroissantes*
3) Cl *et* Cl' *sont croissantes*
4) $\perp \circ \top \circ \perp = \perp$, *et de même* $\top \circ \perp \circ \top = \top$
5) $\mathrm{Im}\,\top = \mathrm{Im}\,\mathrm{Cl} = \mathrm{Fix}\,\mathrm{Cl}$, *appelé l'ensemble des éléments* clos *de* E
6) $\mathrm{Cl} \circ \mathrm{Cl} = \mathrm{Cl}$.
7) ($\perp$ *strictement décroissante*) $\Leftrightarrow \mathrm{Inj}\,\perp \Leftrightarrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Id}_E \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\top = E$
8) $\forall x, x' \in E, \perp(x) < \perp(x') \Leftrightarrow (\mathrm{Im}\,\top \cap \overrightarrow{<}(x) \subset \overrightarrow{<}(x'))$.
9) Notant $K = \mathrm{Im}\,\top$, $\top \circ \perp_{|K} = \mathrm{Id}_K$ *donc* $\perp_{|K}$ *est strictement décroissante et* ${\perp_{|K}}^{-1} = \top_{|\,\mathrm{Im}\,\perp}$.

Preuves:
1) $\perp(x) < \perp(x) \Rightarrow x < \top(\perp(x))$.
1) $\Rightarrow$ 2) : $\forall x, y \in E, x < y < \top(\perp(y)) \Rightarrow \perp(y) < \perp(x)$.
1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow$ 4) : $\mathrm{Id}_E < \mathrm{Cl} \Rightarrow \perp \circ \mathrm{Cl} < \perp < \mathrm{Cl}' \circ \perp = \perp \circ \top \circ \perp$.
2) $\Rightarrow$ 3) et 4) $\Rightarrow$ 6) sont immédiats.
4) $\Rightarrow$ 5) : $\mathrm{Cl} = \top \circ \perp \Rightarrow \mathrm{Im}\,\mathrm{Cl} \subset \mathrm{Im}\,\top$. Puis, $\mathrm{Cl} \circ \top = \top \Rightarrow \mathrm{Im}\,\top \subset \mathrm{Fix}\,\mathrm{Cl} \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{Cl}$.
7) $(\mathrm{Inj}\,\perp \wedge \perp \circ \mathrm{Cl} = \perp) \Rightarrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Id}_E \Rightarrow (\mathrm{Im}\,\top = E \wedge \mathrm{Cl} \circ \top = \top) \Rightarrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Id}_E \Rightarrow \perp$ str. décr.
8) $\overleftarrow{<}_F \circ \perp = \top^* \circ \overrightarrow{<}_E$, avec $\overleftarrow{<}_F$ strictement croissante.
9) $K = \mathrm{Fix}(\top \circ \perp) \Rightarrow \top \circ \perp \circ \mathrm{Id}_K = \mathrm{Id}_K$. Autre preuve : $(\perp_{|K}, \top) \in \mathrm{Gal}(K,F)$ avec $\top$ surjective.
Enfin, dans $\top_{|\,\mathrm{Im}\,\perp} \circ \perp_{|K} = \mathrm{Id}_K$ les rôles de $\top$ et $\perp$ sont symétriques. □

Remarque. *les propriétés 1) et 2) impliquent réciproquement que* $(\perp,\top) \in \mathrm{Gal}(E,F)$.

En effet, $\forall x \in E, \forall y \in F, x < \top(y) \Rightarrow y < \perp(\top(y)) < \perp(x)$ □

3.2. Correspondances de Galois croissantes

Les propriétés des deux sortes de correspondances de Galois se traduisent les unes en les autres. Notamment si $(u, v) \in \mathrm{Gal}^+(E, F)$, u et v sont croissantes, $v \circ u$ est extensive et $u \circ v < \mathrm{Id}_F$.

La permutation $\complement_Y$, renversant l'ordre d'inclusion dans $F = \mathcal{P}(Y)$, permet de traduire l'exemple fondamental. Ainsi toute relation $R \subset X \times Y$ définit un $(u, v) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$ par

$$\begin{array}{lll} \forall A \subset X, u(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, x\; R\; y\} = \bigcup\limits_{x \in A} \overrightarrow{R}(x) = R_*(A) & \overrightarrow{R}(x) = u(\{x\}) & u(\emptyset) = \emptyset \\ \forall B \subset Y, v(B) = \{x \in X | \overrightarrow{R}(x) \subset B\} = \overrightarrow{R}^*(\mathcal{P}(B)) & \overleftarrow{R}(y) = \complement_X v(\complement_Y \{y\}) & v(Y) = X \end{array}$$

En effet, $\forall A \subset X, \forall B \subset F, A \subset v(B) \Leftrightarrow (\forall x \in A, \overrightarrow{R}(x) \subset B) \Leftrightarrow u(A) \subset B$.

Le cas $R = \mathrm{Gr}\, f$ où $f \in Y^X$ donne $(f_*, f^*) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$.

Le cas $R = {}^t\mathrm{Gr}\, g$ où $g \in X^Y$ donne $(g^*, \complement_X \circ g_* \circ \complement_Y) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$.

Proposition. *Soient E, F, G trois ensembles ordonnés, $(u, v) \in \mathrm{Gal}^+(E, F)$, et $(u', v') \in \mathrm{Gal}(F, G)$ (resp. $\mathrm{Gal}^+(F, G)$). Alors $(u' \circ u, v \circ v') \in \mathrm{Gal}(E, G)$ (resp. $\mathrm{Gal}^+(E, G)$)*

Le cas croissant s'écrit $\forall x \in E, \forall y \in G, x < v(v'(y)) \Leftrightarrow u(x) < v'(y) \Leftrightarrow u'(u(x)) < y$. □

Si $E = \mathcal{P}(X), F = \mathcal{P}(Y), G = \mathcal{P}(Z)$, si (u, v) est associée à $R \subset X \times Y$ et (u', v') à $R' \subset Y \times Z$, alors $(u' \circ u, v \circ v')$ est associée à $R'' \subset X \times Z$ définie par:

— Cas décroissant : $xR''z \Leftrightarrow \overrightarrow{R}(x) \subset \overleftarrow{R'}(z)$, i.e. $\overrightarrow{R''}(x) = \bigcap_{y \in \vec{R}(x)} \overrightarrow{R'}(y)$.

— Cas croissant: $xR''z \Leftrightarrow \overrightarrow{R}(x) \cap \overleftarrow{R'}(z) \neq \emptyset$, i.e. $\overrightarrow{R''}(x) = \bigcup_{y \in \vec{R}(x)} \overrightarrow{R'}(y)$.

Dans les 2 cas, si $R = \mathrm{Gr}\, f$ où $f \in Y^X$ alors $\overrightarrow{R''} = \overrightarrow{R'} \circ f$.

Dans le cas croissant, si $R' = \mathrm{Gr}\, g$ où $g \in Z^Y$ alors $\overrightarrow{R''} = g_* \circ \overrightarrow{R}$.

Proposition. *Soient E, F, G trois ensembles ordonnés, $(u, v) \in \mathrm{Gal}^+(E, F)$, $f \in G^E$, $g \in G^F$.*
1) Si f est croissante et $f \circ v < g$ alors $f < g \circ u$.
2) Si g est croissante et $f < g \circ u$ alors $f \circ v < g$.

Preuves: 1) $f < f \circ v \circ u < g \circ u$; 2) $f \circ v < g \circ u \circ v < g$. □

(Remarque: ces deux cas sont symétriques, même si cette symétrie est alambiquée).

Caractérisation des clôtures

Une clôture d'un ensemble ordonné E est une fonction $f \in E^E$ aux propriétés équivalentes
1) Il existe un ensemble F et un $(u, v) \in \mathrm{Gal}(E, F)$ ou $\mathrm{Gal}^+(E, F)$ tel que $v \circ u = f$
2) f est croissante, idempotente et extensive
3) Notant $K = \mathrm{Im}\, f$, on a $\forall x \in E, \forall y \in K, x < y \Leftrightarrow f(x) < y$, autrement dit $(f, \mathrm{Id}_K) \in \mathrm{Gal}^+(E, K)$.

Preuve : 3) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2); pour 2) $\Rightarrow$ 3), $\forall x \in E, \forall y \in K, x < f(x) < y \Rightarrow x < y \Rightarrow f(x) < f(y) = y$. □

Remarques:

— 2) $\Rightarrow$ 3) est un cas particulier de la remarque du 3.1. En effet, $f \circ f = f \Rightarrow f \circ \mathrm{Id}_K < \mathrm{Id}_K$ (extensivité de la clôture dans K^-).

— $\forall K \subset E, \forall f \in K^E, (f, \mathrm{Id}_K) \in \mathrm{Gal}^+(E, K) \Rightarrow \mathrm{Im}\, f = K$ d'après 7) avec Id_K injective.

3.3. Bornes supérieures et inférieures

Dans tout ensemble ordonné E, la relation $<$ elle-même définit $(+_E, -_E) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(E))$:

$$\forall A \subset E, +(A) = \{y \in E | \forall x \in A, x < y\} = \{y \in E | A \subset \overleftarrow{<}(y)\}$$
$$\forall A \subset E, -(A) = \{x \in E | \forall y \in A, x < y\} = \bigcap_{x \in A} \overleftarrow{<}(x)$$

Les éléments de $-(A)$ sont les *minorants de* A, et ceux de $+(A)$ sont les *majorants de* A dans E.

$+ \circ \overleftarrow{<} = \overrightarrow{<}$ et $- \circ \overrightarrow{<} = \overleftarrow{<}$ car $\forall x, y \in E, y \in \overrightarrow{<}(x) \Leftrightarrow x < y \Leftrightarrow \overleftarrow{<}(x) \subset \overleftarrow{<}(y) \Leftrightarrow y \in +(\overleftarrow{<}(x))$.

Dans une partie $B \subset E$, $\forall A \subset B, -_B(A) = B \cap -(A) \wedge +_B(A) = B \cap +(A)$.

Un *plus grand élément* (ou élément maximum) de A est un majorant de A dans A; un *plus petit élément* (ou minimum) de A, est un minorant de A dans A:

$$
\begin{gathered}
x : \max A \Leftrightarrow x \in A \cap +(A) \Leftrightarrow (x \in A \wedge A \subset \overleftarrow{<}(x)) \Leftrightarrow x \in +_A(A) \\
x : \min A \Leftrightarrow x \in A \cap -(A) \Leftrightarrow (A \subset \overrightarrow{<}(x) \wedge x \in A)
\end{gathered}
$$

Notamment $x : \max \overleftarrow{<}(x)$. Un tel élément est unique $(\forall A \subset E, !x \in E, x : \max A)$ car

$$
(x : \max A \wedge y : \max A) \Rightarrow (x \in A \subset \overleftarrow{<}(y) \wedge y \in A \subset \overleftarrow{<}(x)) \Rightarrow x = y.
$$

Une *borne inférieure* est le plus grand minorant; une *borne supérieure* est le plus petit majorant, lorsqu'ils existent:

$$
\begin{gathered}
x : \inf A \Leftrightarrow x : \max -(A) \Leftrightarrow x \in -(A) \cap +(-(A)) \\
x : \sup A \Leftrightarrow x : \min +(A) \Leftrightarrow x \in +(A) \cap -(+(A))
\end{gathered}
$$

On a $x : \min A \Rightarrow x : \inf A$ car $A \subset +(-(A))$. De même $x : \max A \Rightarrow x : \sup A$.

Si $E = \mathcal{P}(X)$,

$$
\begin{gathered}
\bigcup A : \sup A \\
\bigcap A : \inf A
\end{gathered}
$$

Proposition. *Pour toute fonction croissante $f \in F^E$, tout $x \in E$ et tout $A \subset E$, on a*

$$
\begin{gathered}
x : \max A \Rightarrow f(x) : \max f[A] \\
x : \min A \Rightarrow f(x) : \min f[A]
\end{gathered}
$$

Proposition. $\forall A \subset E, \forall x \in E, x : \inf A \Leftrightarrow \overleftarrow{<}(x) = -(A) \Leftrightarrow (\forall y \in E, y < x \Leftrightarrow A \subset \overrightarrow{<}(y))$.

Preuve:

$$
\begin{gathered}
x \in +(-(A)) \Leftrightarrow -(A) \subset \overleftarrow{<}(x) \\
x \in -(A) \Leftrightarrow A \subset \overrightarrow{<}(x) = +(\overleftarrow{<}(x)) \Leftrightarrow \overleftarrow{<}(x) \subset -(A)
\end{gathered}
$$
□

Proposition. $\forall (\bot, \top) \in \mathrm{Gal}(E, F)$,

$$
\begin{gathered}
\forall x \in E, \bot(x) : \max \top^*(\overrightarrow{<}(x)) \\
\top^* \circ +_E = -_F \circ \bot_* \\
\forall A \subset E, \forall x \in E, x : \sup A \Rightarrow \bot(x) : \inf \bot[A].
\end{gathered}
$$

Preuves:

$$
\begin{gathered}
(\bot(x) : \max \overleftarrow{<}(\bot(x))) \wedge (\overleftarrow{<}(\bot(x)) = \top^*(\overrightarrow{<}(x))) \\
\top^*(+(A)) = \bigcap_{y \in A} \top^*(\overrightarrow{<}(y)) = \bigcap_{y \in A} \overleftarrow{<}(\bot(y)) = -(\bot[A]) \\
x : \sup A \Rightarrow \overleftarrow{<}(\bot(x)) = \top^*(\overrightarrow{<}(x)) = \top^*(+(A)) = -(\bot[A])
\end{gathered}
$$
□

Proposition. *Pour toute clôture f sur E, notant $K = \mathrm{Im}\, f$ on a $\forall x \in E$,*

$$
\begin{gathered}
f(x) : \min(K \cap \overrightarrow{<}(x)) \\
\forall A \subset K, x : \inf A \Leftrightarrow x : \inf_K A
\end{gathered}
$$

Preuves : $(f, \mathrm{Id}_K) \in \mathrm{Gal}^+(E, K) \Rightarrow (f(x) : \min \mathrm{Id}_K^*(\overrightarrow{<}(x)) \wedge (x : \inf_K A \Rightarrow \mathrm{Id}_K(x) : \inf \mathrm{Id}_K[A]))$.
$\forall y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) < y$ donc $x : \inf A \Rightarrow f(x) \in -(A) = \overleftarrow{<}(x)$, or $x < f(x)$ donc $x = f(x) \in K$. □

3.4. Treillis complet

Un *treillis complet* est un ensemble ordonné E où tout $A \subset E$ a une borne supérieure notée $\sup A$, et donc aussi une borne inférieure $\inf A = \sup -(A)$ (car $-(+(-(A))) = -(A)$). Alors E a un minimum $0 = \sup \emptyset = \inf E$, un maximum $1 = \inf \emptyset = \sup E$, et $\inf \circ \overrightarrow{<} = \mathrm{Id}_E = \sup \circ \overleftarrow{<}$, $\overleftarrow{<} \circ \inf = -$, $\overrightarrow{<} \circ \sup = +$, $\overrightarrow{<} \circ \inf = + \circ -$, $\overleftarrow{<} \circ \sup = - \circ +$, $(\inf, \overrightarrow{<}) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(E), E)$, et $(\sup, \overleftarrow{<}) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(E), E)$.

Le prédicat $x : \sup A$ se réécrit $x = \sup A$. Les bornes sup et inf s'appliquent aux familles:

$$\bigvee_{i\in I} x_i = \sup\{x_i | i \in I\} \qquad \bigwedge_{i \in I} x_i = \inf\{x_i | i \in I\}$$
$$\forall y \in E, \quad \bigvee_{i\in I} x_i < y \Leftrightarrow \forall i \in I, x_i < y \qquad y < \bigwedge_{i\in I} x_i \Leftrightarrow \forall i \in I, y < x_i$$

Le cas des uplets définit des opérations (seules présentes sur les treillis non complets):

$$\begin{array}{lcc} \forall x, y \in E, & x \vee y = \sup\{x, y\} & x \wedge y = \inf\{x, y\} \\ \forall z \in E, & x \vee y < z \Leftrightarrow ((x < z) \wedge (y < z)) & z < x \wedge y \Leftrightarrow ((z < x) \wedge (z < y)) \\ & x \vee y \vee z = (x \vee y) \vee z = \sup\{x, y, z\} & x \wedge y \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = \inf\{x, y, z\} \end{array}$$

Tout ensemble $E = \mathcal{P}(X)$ est un treillis complet où $\sup = \bigcup$ et $\inf = \bigcap$. Mais on n'a pas toujours de distributivité entre $\vee$ et $\wedge$ comme entre $\cup$ et $\cap$. Ainsi dans le treillis $\{0, 1, x, y, z\}$ où x, y, z sont deux à deux incomparables, $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$ mais $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee 0 = 0$.

Entre deux treillis E, F, $\forall (\perp, \top) \in \mathrm{Gal}(E, F), \forall x, y \in E, \perp(x \vee y) = \perp(x) \wedge \perp(y)$.

(Avec une fonction croissante $f \in F^E$, on a seulement $\sup f[A] < f(\sup A)$ et $f(\inf A) < \inf f[A]$.)

Théorème. *Soient E un treillis complet, F un ensemble ordonné, et $f \in F^E$. Alors*
$(\forall A \subset E, f(\sup A) : \inf f[A]) \Leftrightarrow (\exists g \in E^F, (f, g) \in \mathrm{Gal}(E, F)) \Rightarrow ((f(0) : \max F) \wedge (f(1) : \min \mathrm{Im} f))$
$(\forall A \subset E, f(\sup A) : \sup f[A]) \Leftrightarrow (\exists g \in E^F, (f, g) \in \mathrm{Gal}^+(E, F)) \Rightarrow f(0) : \min F.$
$(\forall A \subset E, f(\inf A) : \inf f[A]) \Leftrightarrow (\exists g \in E^F, (g, f) \in \mathrm{Gal}^+(F, E)) \Rightarrow f(1) : \max F.$

Preuve. $\forall y \in F$, soit $A_y = \{x \in E | y < f(x)\}$, et $g(y) = \sup A_y = \sup \overleftarrow{<}(g(y))$. Si $f(\sup A) : \inf f[A]$,

$$\forall A \subset E, A \subset A_y \Leftrightarrow (\forall x \in A, y < f(x)) \Leftrightarrow y < f(\sup A)$$
$$A_y \subset A_y \Rightarrow y < f(\sup A_y)$$
$$\overleftarrow{<}(g(y)) \subset A_y \Leftarrow y < f(\sup \overleftarrow{<}(g(y)))$$

Enfin, $(\forall y \in F, A_y \subset \overleftarrow{<}(g(y)) \subset A_y) \Leftrightarrow (f, g) \in \mathrm{Gal}(E, F)$. □

Théorème. *Soient X un ensemble, E un treillis complet, $G = \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(X), E)$, et $s = (X \ni x \mapsto \{x\})$. Alors $G \cong E^X$ par $\phi = (G \ni (\perp, \top) \mapsto \perp \circ s)$, d'inverse $\psi = (E^X \ni f \mapsto (\inf \circ f_*, f^* \circ \overrightarrow{<}))$.*

Preuve. $\forall f \in E^X, ((f_*, f^*) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(E)) \wedge (\inf, \overrightarrow{<}) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(E), E)) \Rightarrow \psi(f) \in G$.
$\forall f \in E^X, \phi(\psi(f)) = \inf \circ f_* \circ s = f$.
$\forall (\perp, \top) \in G, x \in X, y \in E, x \in \top(y) \Leftrightarrow y < \phi(\perp, \top)(x)$. Or $(\perp, \top) \mapsto \top$ est injective donc ϕ aussi. □

Corollaire. *Pour tous ensembles X et Y,* $\mathrm{Gal}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)) \cong \mathcal{P}(Y)^X \cong \mathcal{P}(X \times Y)$.

Une partie F d'un treillis complet E est dite *stable par bornes inférieures* ssi $\forall A \subset F, \inf A \in F$.

De même se définit la *stabilité par bornes supérieures*; la *stabilité par unions* d'un $F \subset \mathcal{P}(X)$ (qui implique $\emptyset \in F$) et par intersections (dont le cas $\bigcap \emptyset = X \in F$, supposant X fixé).

Proposition. *Soient E un treillis complet, et $K \subset E$. La stabilité de K par bornes inférieures équivaut à l'existence d'une clôture Cl d'image K, et implique que:*
1) K est un treillis complet où $\forall A \subset K, \inf_K A = \inf_E A$, et $1_K = 1_E (= \inf \emptyset)$.
2) $\forall A \subset K, \sup_K A = \mathrm{Cl}(\sup A)$.
3) $\forall A \subset E, \mathrm{Cl}(\sup A) = \mathrm{Cl}(\bigvee_{x\in A} \mathrm{Cl}(x))$

Preuve: (K stable / bornes inférieures) $\Leftrightarrow$ (K treillis complet et $\forall A \subset K, \mathrm{Id}_K(\inf_K A) = \inf_E \mathrm{Id}_K[A]$)
$\Leftrightarrow (\exists \mathrm{Cl} \in K^E, (\mathrm{Cl}, \mathrm{Id}_K) \in \mathrm{Gal}^+(E, K)) \Rightarrow K = \mathrm{Im}\, \mathrm{Cl}$

On en déduit facilement 1) et 2).

3) $\forall y \in K, \sup A < y \Leftrightarrow (\forall x \in A, \mathrm{Cl}(x) < y) \Leftrightarrow (\bigvee_{x \in A} \mathrm{Cl}(x)) < y$. □

La représentation par $\overleftarrow{<}$ de tout ensemble ordonné E comme ensemble de parties ordonné par inclusion, le plonge dans le treillis complet $K = \mathrm{Im}\,-$, stable par intersections, où donc les bornes inférieures sont les intersections. Les deux coïncident si E est déjà un treillis complet ($\mathrm{Im}\,\overleftarrow{<} = K$), la construction ne faisant qu'ajouter les bornes manquantes (éléments de $\mathrm{Im}\,- \setminus \mathrm{Im}\,\overleftarrow{<}$).

Comme $+\circ\overleftarrow{<} = \overrightarrow{<}$ et $\complement_E \circ +$ est une bijection strictement croissante de $\mathrm{Im}\,-$ sur $\mathrm{Im}(\complement_E \circ +)$, la construction est symétrique, donnant une autre présentation de K comme ensemble de parties stable par unions; mais les deux formes de stabilité ne se trouvent pas sur une même représentation.

Mais une application même strictement croissante f de E dans un treillis complet F conservant les bornes inférieures, peut n'être pas prolongeable en application de K dans F ayant cette propriété. En effet il peut exister $x, y, z \in E$ où $-\{x, y\} = -\{x, z\}$ mais $f(x) \wedge f(y) \neq f(x) \wedge f(z)$.

Pour tout treillis complet F et tout ensemble E, l'ensemble F^E est un treillis complet, avec pour tout $A \subset F^E$, $\sup A = (x \mapsto \sup\{f(x) | f \in A\})$ et de même pour la borne inférieure.

Proposition. *Soit E un ensemble ordonné, F un treillis complet, et $\nearrow = (F^E \ni f \mapsto \sup_F \circ f_* \circ \overleftarrow{<}_E)$. Alors $\nearrow$ est la clôture d'image l'ensemble C des fonctions croissantes de E dans F.*

Preuve: $\forall f \in F^E, \nearrow f \in C$ car sup, f_* et $\overleftarrow{<}$ sont toutes trois croissantes.
Puis, $f < \nearrow f$ car $\forall x \in E, x \in \overleftarrow{<}(x) \Rightarrow f(x) < \sup f[\overleftarrow{<}(x)] = \nearrow f(x)$.
Enfin, $\forall g \in C, \forall x \in E, f < g \Rightarrow (\forall y \in \overleftarrow{<}(x), f(y) < g(y) < g(x)) \Rightarrow \sup f[\overleftarrow{<}(x)] < g(x)$. □

3.5. Théorème du point fixe de Tarski

Soit E un treillis complet (pour toute cette section). Soit $\forall F \subset E, \forall x \in E, \top_F(x) = F \cap \overrightarrow{<}(x)$ de sorte que $(\inf_{|\mathcal{P}(F)}, \top_F) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(F), E) \cong E^F \ni \mathrm{Id}_F$. Sa clôture $\mathrm{Cl}_F = \inf \circ \top_F \in E^E$ participe elle-même à $((F \mapsto \mathrm{Cl}_F), \top) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(E), E^E) \cong (E^E)^E \ni (y \mapsto (x \mapsto (x < y \to y|1)))$, où

$$\forall f \in E^E, \top(f) = \{y \in E | \forall x \in E, x < y \Rightarrow f(x) < y\} = \{x \in E | \nearrow f(x) < x\} = \top(\nearrow f)$$

Sa clôture sera notée $E^E \ni f \mapsto \lceil f \rceil = \mathrm{Cl}_{\top(f)}$. On a $\nearrow f < \lceil \nearrow f \rceil = \lceil f \rceil$.

Proposition. *Pour toute clôture $h \in E^E$ on a $\mathrm{Im}\, h = \top(h)$, et $h = \lceil h \rceil$.*

Preuve: (h clôture) $\Leftrightarrow (\mathrm{Id} < h \wedge \mathrm{Im}\, h \subset \top(h)) \Rightarrow (h, \mathrm{Id}_{\top(h)}) \in \mathrm{Gal}^+(E, \top(h)) \Rightarrow \mathrm{Im}\, h = \top(h)$.
Autre méthode: $\forall x \in E, (x < h(x) \wedge h = \nearrow(h)) \Rightarrow (x \in \mathrm{Fix}\, h \Leftrightarrow h(x) < x \Leftrightarrow x \in \top(h))$.
Enfin, $\forall x \in E, h(x) : \min(\mathrm{Im}\, h \cap \overrightarrow{<}(x))$, donc $h = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Im}\, h} = \lceil h \rceil$. □

Proposition. $\forall F \subset E, \top(\mathrm{Cl}_F) = \inf[\mathcal{P}(F)]$, *et* ($F$ *est stable par bornes inférieures*) $\Leftrightarrow \top(\mathrm{Cl}_F) = F$.

Preuve. $\top(\mathrm{Cl}_F) = \mathrm{Im}\, \mathrm{Cl}_F = \mathrm{Im}(\inf_{|\mathcal{P}(F)})$. Puis $\inf[\mathcal{P}(F)] \subset F \Leftrightarrow \top(\mathrm{Cl}_F) \subset F \Leftrightarrow (\top(\mathrm{Cl}_F) = F)$. □

Toute intersection de parties de E stables par bornes inférieures est stable par bornes inférieures.

Pour tout $F \subset E$, la stabilité par bornes inférieures de $\inf[\mathcal{P}(F)]$ peut se voir directement ainsi : $\forall B \subset \inf[\mathcal{P}(F)], \exists A \subset \mathcal{P}(F), B = \inf[A]$ (à savoir $A = \{X \subset F | \inf X \in B\}$).

Or $(\inf, \overrightarrow{<}) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{P}(E), E)$ donc $\forall B \subset \inf[\mathcal{P}(F)], \inf B = \bigwedge_{X \in A} \inf X = \inf(\bigcup A) \in \inf[\mathcal{P}(F)]$.

Théorème. *Soient $g = \nearrow f \in E^E$, $K = \top(f) = \top(g) = \{x \in E | g(x) < x\}$, $h = \lceil f \rceil = \mathrm{Cl}_K$. Alors*
1) $\forall x, y \in E, g(x) < y < x \Rightarrow y \in K$
2) $g[K] \subset K$
3) $\inf K : \min \mathrm{Fix}\, g$. En particulier, $\mathrm{Fix}\, g \neq \emptyset$.
4) $\forall x, z \in E, z \in \top_K(x) \Leftrightarrow (x \vee g(z)) < z$
5) $\forall x \in E, h(x) = (x \vee g(h(x))) \in \top_K(x)$
6) $h \circ f < h \circ g < g \circ h < h$, qui deviennent tous égaux si f est extensive.

Preuves:
1) $g(x) < y < x \Rightarrow g(y) < g(x) < y \Rightarrow y \in K$
2) par 1) avec $y = g(x)$
3) $\inf K = x \in K \Rightarrow ((g(x) < x) \wedge (g(x) \in K \subset \overrightarrow{<}(x))) \Rightarrow x \in \mathrm{Fix}\, g \subset K \subset \overrightarrow{<}(x)$.
4) $z \in \top_K(x) \Leftrightarrow (z \in K \wedge (x < z)) \Leftrightarrow ((g(z) < z) \wedge (x < z)) \Leftrightarrow x \vee g(z) < z$
5) Soit $y = x \vee g(h(x))$. Sachant que $(h(x) : \min \top_K(x))$ on a $g(h(x)) < y < h(x)$ donc $y \in K$. Or $x < y$ donc $y \in \top_K(x)$ donc $h(x) < y$, donc $h(x) = y$.
6) $\forall x \in E, x < h(x) \in K \Rightarrow g(x) < g(h(x)) \in K \Rightarrow h(g(x)) < g(h(x)) < h(h(x)) = h(x)$. □

Remarques:
— 5) ⇒ 3) par $\inf K = h(0)$; réciproquement, 3) appliqué à $g' = (y \mapsto x \vee g(y))$ redonne 5). De plus, $g' = \nearrow(y \mapsto (y = 0 \to x \vee f(0)|f(y)))$.
— $\forall f, g \in E^E, \top(g \vee f) = \top(f) \cap \top(g) \subset \top(g \circ f)$.
— Si f et g sont extensives et g est croissante alors $\top(f) \cap \top(g) = \top(g \circ f)$.

Preuves: $\forall y \in \top(f) \cap \top(g), \forall x \in E, x < y \Rightarrow f(x) < y \Rightarrow g(f(x)) < y$ donc $y \in \top(g \circ f)$.
(Id $< f, g$ croissante) $\Rightarrow (\forall y \in \top(g \circ f), \forall x < y, g(x) < g(f(x)) < y) \Rightarrow \top(g \circ f) \subset \top(g)$.
$\mathrm{Id} < g \Rightarrow (\forall y \in \top(g \circ f), \forall x < y, f(x) < g(f(x)) < y) \Rightarrow \top(g \circ f) \subset \top(f)$. □

Théorème. *S'il existe deux injections $f \in Y^X$ et $g \in X^Y$, alors il existe une bijection entre X et Y.*

Preuve: la fonction $\mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \complement_X g[\complement_Y f[A]]$ est croissante, donc a un point fixe F.
Alors $g[\complement_Y f[F]] = \complement_X F$, de sorte que $(X \ni x \mapsto (x \in F \to f(x)|g^{-1}(x))) : X \leftrightarrow Y$. □

3.6. Transport de clôture

Proposition. *Soient E et F treillis complets, $(u, v) \in \mathrm{Gal}^+(E, F)$, $B \subset F, f \in E^E, g \in F^F$. Alors*
1) $\top_{v[B]} = v_* \circ \top_B \circ u$
2) $\mathrm{Cl}_{v[B]} = v \circ \mathrm{Cl}_B \circ u$
3) $u \circ f < \mathrm{Cl}_B \circ u \Leftrightarrow v[B] \subset \top(f) \Leftrightarrow u \circ \lceil f \rceil < \mathrm{Cl}_B \circ u$
4) $\nearrow f \circ v < v \circ g \Rightarrow u \circ f < g \circ u \Rightarrow u \circ \nearrow f < \nearrow(g) \circ u \Rightarrow f \circ v < v \circ \nearrow(g)$.
5) $u \circ f < g \circ u \Rightarrow v[\top(g)] \subset \top(f) \Leftrightarrow u \circ \lceil f \rceil < \lceil g \rceil \circ u \Leftrightarrow \lceil f \rceil \circ v < v \circ \lceil g \rceil \Rightarrow u(\lceil f \rceil(0)) < \lceil g \rceil(0)$.

Preuves: 1) est facile; 2) s'en déduit par $\inf \circ v_* = v \circ \inf$.
3) $u \circ f < \mathrm{Cl}_B \circ u \Leftrightarrow f < v \circ \mathrm{Cl}_B \circ u = \mathrm{Cl}_{v[B]} \Leftrightarrow v[B] \subset \top(f)$. Ou plus directement:
$(\forall x \in E, \forall y \in B, u(x) < y \Rightarrow u(f(x)) < y) \Leftrightarrow (\forall y \in B, \forall x \in E, x < v(y) \Rightarrow f(x) < v(y))$.
La deuxième équivalence en résulte par $\top(f) = \top(\lceil f \rceil)$.
4) $\mathrm{Id} < v \circ u \Rightarrow f < \nearrow f \circ v \circ u < v \circ g \circ u$. Puis, $f < v \circ \nearrow(g) \circ u \Leftrightarrow \nearrow f < v \circ \nearrow(g) \circ u$.
Le 5) en découle. □

Cas de $E = \mathcal{P}(X)$
Alors $E^E = \mathcal{P}(X)^E \cong \mathcal{P}(E \times X)$, de sorte que la correspondance de Galois $((F \mapsto \mathrm{Cl}_F), \top)$ est associée à la relation entre E et $E \times X$, définie par $(A, (B, x)) \mapsto (B \subset A \Rightarrow x \in A)$.

Proposition. *Soient X, Y deux ensembles, $f \in \mathcal{P}(X)^{\mathcal{P}(X)}, g \in \mathcal{P}(Y)^{\mathcal{P}(Y)}$ et $u \in Y^X$. Alors*
(1) $\forall P \subset \mathcal{P}(Y), \forall A \subset X, \mathrm{Cl}_{u^*[P]}(A) = u^*(\mathrm{Cl}_P(u[A]))$
(2) $(\forall A \subset X, u[f(A)] \subset g(u[A])) \Rightarrow (\forall B \in \top(g), u^*(B) \in \top(f)) \Leftrightarrow \forall A \subset X, u[\lceil f \rceil(A)] \subset \lceil g \rceil(u[A])$
$\Leftrightarrow \forall B \subset Y, \lceil f \rceil(u^*(B)) \subset u^*(\lceil g \rceil(B))$
(3) $(\forall A \subset X, g(u[A]) \subset u[f(A)]) \Rightarrow (\forall A \in \top(f), u[A] \in \top(g)) \Leftrightarrow \forall A \subset X, \lceil g \rceil(u[A])) \subset u[\lceil f \rceil(A)]$
(4) $(\forall B \subset Y, u^*(g(B)) \subset f(u^*(B))) \Rightarrow \forall B \subset Y, u^*(\lceil g \rceil(B)) \subset \lceil f \rceil(u^*(B))$.

Preuve: les formules (1), (2) et (4) découlent de ce qui précède; on vérifie (3) par
$\forall A \in \top(f), \forall B \subset u[A], \quad g(B) = g(u[A \cap u^*(B)]) \subset u[f(A \cap u^*(B))] \subset u[A]$
$\forall A \subset X, \quad ((u[\lceil f \rceil(A)] \in \top(g)) \wedge (u[A] \subset u[\lceil f \rceil(A)])) \Rightarrow (\lceil g \rceil(u[A]) \subset u[\lceil f \rceil(A)])$. □

Proposition. *Soient $E = \mathcal{P}(X)$, $f \in E^E$, $A \in E$ et $f_A = (\mathcal{P}(A) \ni B \mapsto f(B) \cap A)$. Alors*

$$\forall B \in \top(f), A \cap B \in \top(f_A)$$
$$\forall B \subset A, \lceil f_A \rceil(B) \subset \lceil f \rceil(B)$$
$$\forall B \in E, \lceil f_A \rceil(A \cap B) \subset \lceil f \rceil(B).$$

Si de plus $A \in \top(f)$ alors $\top(f_A) = \top(f) \cap \mathcal{P}(A)$, et $\lceil f_A \rceil = \lceil f \rceil_{|\mathcal{P}(A)}$.

3.7. Préordre engendré par une relation

Pour tous ensembles E, F, tout $f \in F^E$ et toute relation R de préordre sur F, la relation binaire sur E définie par $(x, y) \mapsto (f(x)\ R\ f(y))$ est un préordre sur E, dit *image réciproque de R par f*. C'est l'unique préordre sur E pour lequel f est strictement croissante de E dans F.

Notations. *Soient $E = \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{B}_X = \mathcal{P}(X \times X)$. Soit $(\lambda, \rho) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{B}_X, E^E)$ associé à l'injection $(x, y) \mapsto (\{x\}, y)$ de $X \times X$ dans $E \times X$, à savoir*

$$\begin{aligned} \forall R \in \mathcal{B}_X, \forall x \in X, \lambda(R)(\{x\}) = \overrightarrow{R}(x) \\ \lambda(R)(A) = \emptyset \textit{ si } A \textit{ n'est pas un singleton} \\ \forall f \in E^E, \forall x, y \in X, \rho(f)(x, y) \Leftrightarrow y \in f(\{x\}). \end{aligned}$$

Soit alors $(\mathrm{Cut}, \mathrm{Pre}) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{B}_X, \mathcal{P}(E))$ *associée à la relation* $((x, y), A) \mapsto (x \in A \Rightarrow y \in A)$ *entre* $X \times X$ *et* E:

$$\mathrm{Cut}(R) = \top(\lambda(R)) = \{A \in E | \forall x, y \in X, (x\, R\, y \wedge x \in A) \Rightarrow y \in A\} = \{A \subset X | \bigcup_{x \in A} \overrightarrow{R}(x) \subset A\}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Pre}(F) = \rho(\mathrm{Cl}_F) = (X^2 \ni (x, y) \mapsto (\forall A \in F, x \in A \Rightarrow y \in A)) \\ \overrightarrow{\mathrm{Pre}(F)}(x) = \bigcap\{A \in F | x \in A\}. \end{aligned}$$

Ces notions présentent une symétrie nouvelle: $\forall R \in \mathcal{B}_X, \mathrm{Cut}({}^tR) = \complement_X[\mathrm{Cut}(R)]$. Ainsi,

$$\overleftarrow{\mathrm{Pre}(F)}(x) = \bigcap\{B \in E | \complement_X B \in F \wedge x \in B\} = \complement_X \bigcup\{A \in F | x \notin A\}$$

Théorème. *L'ensemble* $\mathrm{Im}\,\mathrm{Pre}$ *des éléments clos de $\mathcal{B}_X$ est l'ensemble des préordres sur X.*

Preuve: pour tout ensemble Y et toute relation R entre Y et X, on a $\forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Pre}(\mathrm{Im}\,\overrightarrow{R})(x, y) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathrm{Im}\,\overrightarrow{R}, x \in A \Rightarrow y \in A) \Leftrightarrow (\forall z \in Y, x \in \overrightarrow{R}(z) \Rightarrow y \in \overrightarrow{R}(z)) \\ \Leftrightarrow (\forall z \in Y, z \in \overleftarrow{R}(x) \Rightarrow z \in \overleftarrow{R}(y)) \Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) \subset \overleftarrow{R}(y). \end{aligned}$$

Ainsi $\forall F \subset \mathcal{P}(X)$, posant $Y = F$ et $\overrightarrow{R} = \mathrm{Id}_F$, (i.e. $R = {}^t\in$), on a $\mathrm{Pre}(F) = \mathrm{Pre}(\mathrm{Im}\,\overrightarrow{R})$, préordre image réciproque de l'inclusion par $\overleftarrow{R}$.

Réciproquement, avec $Y = X$, tout préordre R sur X est égal à $\mathrm{Pre}(\mathrm{Im}\,\overrightarrow{R}) \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Pre}$. □

Définition. *Pour toute relation binaire R sur un ensemble X on appelle* préordre engendré par R *et on notera $\lceil R \rceil$ la relation* $\mathrm{Pre}(\mathrm{Cut}(R))$. *C'est le plus petit des préordres plus grands que R.*

Proposition. $\forall F \subset E, \forall A \in E, A \in \mathrm{Cut}(\mathrm{Pre}(F)) \Leftrightarrow \bigcup_{x \in A} \bigcap\{B \in F | x \in B\} = A$.

Preuve:

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Cut}(\mathrm{Pre}(F)) &\Leftrightarrow \bigcup_{x \in A} \overrightarrow{\mathrm{Pre}(F)}(x) \subset A \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{x \in A} \bigcap\{B \in F | x \in B\} \subset A \end{aligned}$$

L'autre inclusion vient de $\forall x \in A, x \in \overrightarrow{\mathrm{Pre}(F)}(x)$. □

Théorème. *l'ensemble* $\mathrm{Im}\,\mathrm{Cut}$ *des éléments clos de $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E qui sont à la fois stables par unions et stables par intersections.*

Preuve: $\mathrm{Cut} = \top \circ \lambda \Rightarrow \mathrm{Im}\,\mathrm{Cut} \subset \mathrm{Im}\,\top$ donc tout élément de $\mathrm{Im}\,\mathrm{Cut}$ est stable par intersections. Symétriquement, il est aussi stable par unions.
Réciproquement, si F est stable par unions et intersections alors $\mathrm{Cut}(\mathrm{Pre}(F)) \subset F$ par la proposition ci-dessus, donc F est clos. □

Commentons plus en détails ce résultat: partant d'un $F \subset E = \mathcal{P}(X)$ quelconque, on pourrait considérer l'ensemble des intersections de ses parties, qui serait stable par intersections. Mais on en prend seulement une partie, à savoir $\mathrm{Im}\,\overrightarrow{\mathrm{Pre}(F)}$. Puis, on considère un certain ensemble $\mathrm{Cut}(\mathrm{Pre}(F))$ d'éléments chacun égal à l'union d'une partie de $\mathrm{Im}\,\overrightarrow{\mathrm{Pre}(F)}$. Et ce qui est remarquable, c'est que cet ensemble $\mathrm{Cut}(\mathrm{Pre}(F))$ englobe F et est à la fois stable par unions et par intersections, et est ainsi le plus petit ensemble stable par unions et par intersections qui englobe F. (Dès lors, il est aussi égal à l'ensemble de toutes les unions d'intersections de parties de F.)

Cette propriété de tout $\mathcal{P}(X)$, ne se généralise pas aux autres treillis complets. Certes, dans tout treillis complet E, on a bien pour tout $F \subset E$ un plus petit ensemble stable par bornes supérieures et inférieures qui englobe F, comme tout ensemble $\top(f) \cap \top(g)$ des éléments à la fois clos pour deux clôtures f et g est celui $\top(g \circ f)$ des éléments clos pour une troisième clôture $h = \lceil g \circ f \rceil$. Mais ce $g \circ f$ qu'est ici $F \mapsto \sup[\mathcal{P}(\inf[\mathcal{P}(F)])]$, n'est pas toujours une clôture. On trouve en effet facilement un treillis à un petit nombre fini d'éléments, avec une partie stable par bornes inférieures mais dont l'ensemble des bornes supérieures n'est pas stable par bornes inférieures.

On peut contempler une formule de cas particulier des remarques précédentes : toute intersection d'unions est également une union d'intersections. Formellement,

$$B = \bigcap_i \bigcup_{j \in J_i} A_{ij} \Rightarrow B = \bigcup_{x \in B} \bigcap_{(i,j) \in C_x} A_{ij} \text{ où } C_x = \{(i,j) \in \coprod_i J_i | x \in A_{ij}\}$$

Cette formule apparaît évidente à vérifier directement une fois traduite du langage des ensembles vers celui des énoncés, à savoir

$$(\forall y \exists z, A(x,y,z)) \Leftrightarrow (\exists x', (\forall y \exists z, A(x',y,z)) \wedge \forall y \forall z (A(x',y,z) \Rightarrow A(x,y,z))).$$

Voyons comment le théorème du point fixe s'applique sur ces notions.

Soit $R \in \mathcal{B}_X$, $f = \lambda(R) \in E^E$. la fonction $g = \nearrow f$ s'écrit désormais

$$\forall A \in E, \qquad g(A) = \bigcup_{x \in A} \overrightarrow{R}(x)$$

$$\forall A \in E, \forall y \in X, \qquad y \in g(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A, x \; R \; y) \Leftrightarrow A \cap \overleftarrow{R}(y) \neq \emptyset.$$

Puis, soit $h = \lceil f \rceil = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cut}\, R} \in (\mathrm{Cut}\, R)^E$. Comme $\mathrm{Cut}\, R$ est stable par unions,

$$\forall A \in E, \bigcup_{x \in A} h(\{x\}) \in \mathrm{Cut}\, R.$$

Avec $h(\{x\}) = \overrightarrow{\lceil R \rceil}(x)$, et appliquant à $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ la formule $\mathrm{Cl}(\sup A) = \mathrm{Cl}(\bigvee_{x \in A} \mathrm{Cl}(x))$ on trouve

$$h(A) = \lceil R \rceil_* \, (A).$$

Le théorème du point fixe s'exprime alors $\forall A \in E, h(A) = A \cup g(h(A))$. En particulier,

$$\forall x, y \in X, x \; \lceil R \rceil \; y \Leftrightarrow (x = y \vee \exists z \in X, x \; \lceil R \rceil \; z \wedge z \; R \; y).$$

Pour tous X, Y ensembles, $R \in \mathcal{B}_X, S \in \mathcal{B}_Y$, et $u \in Y^X$,

$$\begin{aligned}
\forall B \subset \mathcal{P}(Y), \forall x, y \in X, \underset{X}{\mathrm{Pre}}(u^*[B])(x,y) &\Leftrightarrow \underset{Y}{\mathrm{Pre}}(B)(u(x), u(y)) \\
(\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow u(x) \; \lceil S \rceil \; u(y)) &\Rightarrow u^*[\mathrm{Cut}(S)] \subset \mathrm{Cut}(R) \\
&\Rightarrow \forall x, y \in X, x \; \lceil R \rceil \; y \Rightarrow u(x) \; \lceil S \rceil \; u(y) \\
(\forall x \in X, \overrightarrow{S}(u(x)) \subset u[\overrightarrow{R}(x)]) &\Rightarrow u_*[\mathrm{Cut}(R)] \subset \mathrm{Cut}(S) \\
&\Rightarrow (\forall x \in X, \overrightarrow{\lceil S \rceil}(u(x)) \subset u[\overrightarrow{\lceil R \rceil}(x)]) \\
(\forall x \in X, \overleftarrow{S}(u(x)) \subset u[\overleftarrow{R}(x)]) &\Rightarrow u_*[\mathrm{Cut}({}^tR)] \subset \mathrm{Cut}({}^tS) \\
&\Rightarrow (\forall x \in X, \overleftarrow{\lceil S \rceil}(u(x)) \subset u[\overleftarrow{\lceil R \rceil}(x)]).
\end{aligned}$$

On peut aussi montrer la deuxième formule de la manière suivante: $\lceil S \rceil$ est un préordre sur Y donc $(x,y) \mapsto (u(x) \; \lceil S \rceil \; u(y))$ est un préordre sur X, dont l'hypothèse assure qu'il est plus grand que R. Donc il est aussi plus grand que $\lceil R \rceil$ (le plus petit préordre plus grand que R).

Enfin, si $X \subset Y$ et R est la restriction de S à X, alors $\forall x, y \in X, x \; \lceil R \rceil \; y \Rightarrow x \; \lceil S \rceil \; y$. Si de plus $X \in \mathrm{Cut}(S)$ ou $X \in \mathrm{Cut}({}^tS)$ alors $\forall x, y \in X, x \; \lceil R \rceil \; y \Leftrightarrow x \; \lceil S \rceil \; y$.

3.8. Ensembles finis

Définition. *Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{S}$ la relation binaire sur $\mathcal{P}(X)$ définie par*

$$\forall A, B \subset X, A \,\mathcal{S}\, B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge \exists! x \in B, x \notin A) \Leftrightarrow \exists x \in X, x \notin A \wedge B = A \cup \{x\}.$$

On dira que $A \subset X$ est une partie finie *de X ssi $\emptyset \lceil \mathcal{S} \rceil A$; et que X est un* ensemble fini *ssi $\emptyset \lceil \mathcal{S} \rceil X$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

Proposition. *Pour tout $A \subset X$, (A est une partie finie de X) $\Leftrightarrow$ (A est un ensemble fini).*

Preuve: $\mathcal{P}(A) \in \mathrm{Cut}({}^t\mathcal{S})$, donc la restriction de $\lceil \mathcal{S} \rceil$ à A est égale au $\lceil \mathcal{S} \rceil$ sur A. □

Relions cette notion de finitude à celle intuive, assimilable à l'interprétation de la finitude au niveau méta. On qualifie donc de *méta-fini* un ensemble fini au sens intuitif (ou du point de vue méta).

Tout ensemble méta-fini X est fini: partant de $\emptyset$ puis ajoutant un par un chaque élément de X jusqu'à obtenir X, la finitude de chacun de ces ensembles se déduit successivement de celle du précédent. En particulier, $\emptyset$ est fini, puis les singletons puis les paires sont finies, etc.

Réciproquement, supposons qu'il existe un ensemble F contenant exactement les parties méta-finies de X. On a $\emptyset \in F$ et $F \in \mathrm{Cut}(\mathcal{S})$. Or l'ensemble $\overrightarrow{\lceil \mathcal{S} \rceil}(\emptyset)$ des parties finies de X est le plus petit ensemble satisfaisant cette propriété, donc il doit être inclus dans F, et lui est finalement égal. Hélas, rien ne peut garantir qu'un tel ensemble F existe dans l'univers, faute de pouvoir écrire une définition de la méta-finitude.

Or, le problème est que, si X n'est pas méta-fini alors $\mathcal{P}(X)$ non plus, ce qui fait courir le risque à $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ de ne pas contenir vraiment toutes les parties de $\mathcal{P}(X)$, parmi lesquelles l'ensemble F des éléments méta-finis de $\mathcal{P}(X)$, qu'on ne sait pas définir de manière plus fiable. Cela laisse donc courir à X le risque de satisfaire la définition formelle de la finitude "par erreur". Ainsi s'interprète l'indécidabilité de certaines propositions d'arithmétique, et la dépendance que nous avions annoncée, de la notion de finitude par rapport à l'axiome des parties.

Proposition. *L'image de toute fonction de domaine fini est finie.*

Preuve: soit f de domaine X fini, et $Y = \mathrm{Im}\, f$. On a

$$\forall A, B \subset X, A \,\mathcal{S}\, B \Rightarrow (f[A] = f[B] \vee f[A] \,\mathcal{S}\, f[B]) \Rightarrow f[A] \lceil \mathcal{S} \rceil f[B]$$
$$\emptyset \lceil \mathcal{S} \rceil X \Rightarrow f[\emptyset] \lceil \mathcal{S} \rceil f[X] \Rightarrow \emptyset \lceil \mathcal{S} \rceil Y.$$

Vocabulaire. *On appelle "famille finie" une famille indexée par un ensemble fini. On qualifiera aussi de finie une opération sur une famille finie, même si son résultat est infini: un produit fini est le produit d'une famille finie d'ensembles éventuellement infinis. De même pour une union finie.*

Théorème. *Soit $(E_x, R_x)_{x \in X}$ une famille finie où R_x est une relation binaire sur E_x. Munissons $P = \prod_{x \in X} E_x$ de la relation binaire T, dite produit tensoriel des R_x, définie par*

$$\forall u, v \in P, uTv \Leftrightarrow \exists x \in X, u_x R_x v_x \wedge \forall y \in X, y \neq x \Rightarrow u_y = v_y.$$

Alors, $\forall u, v \in P, u \lceil T \rceil v \Leftrightarrow \forall x \in X, u_x \lceil R_x \rceil v_x$.

Preuve. Pour l'implication directe, soit $\forall x \in X, \pi_x = (u \mapsto u_x) \in E_x^P$ la surjection canonique.

$$\forall u, v \in P, uTv \Rightarrow (u_x = v_x \vee u_x R_x v_x) \Rightarrow \pi_x(u) \lceil R_x \rceil \pi_x(v)$$
$$\forall u, v \in P, u \lceil T \rceil v \Rightarrow \pi_x(u) \lceil R_x \rceil \pi_x(v)$$

Pour la réciproque, $\forall x \in X, a \in P$, soit j_x^a la fonction de E_x dans P définie par

$$\forall b \in E_x, \forall y \in X, j_x^a(b)_y = (b, a_y)(y = x).$$

Puis, $\forall w \in P, \forall x \in X, \forall a, b \in E_x, aR_x b \Rightarrow j_x^w(a) T j_x^w(b)$ donc $a \lceil R_x \rceil b \Rightarrow j_x^w(a) \lceil T \rceil j_x^w(b)$.

Puis, $\forall u, v \in P$, soit $\phi \in P^{\mathcal{P}(X)}$ définie par $\phi(A)_x = (v_x, u_x)(x \in A)$. Soient $A, B \subset X$ tels que $A \,\mathcal{S}\, B$, et $x \in \complement_B A$. Posant $w = \phi(A)$, on trouve $j_x^w(u_x) = \phi(A)$, $j_x^w(v_x) = \phi(B)$, de sorte que l'hypothèse implique $\phi(A) \lceil T \rceil \phi(B)$. Donc ϕ est croissante de $(\mathcal{P}(X), \lceil \mathcal{S} \rceil)$ vers $(P, \lceil T \rceil)$.

On conclut $\phi(\emptyset) \lceil T \rceil \phi(X)$, où $\phi(\emptyset) = u$ et $\phi(X) = v$. □

Proposition. *Dans l'ensemble des parties d'un ensemble fini X, $\lceil \mathcal{S} \rceil$ est la relation d'inclusion.*

C'est le théorème appliqué à $E_x = \mathcal{P}(\{x\}) \simeq \mathcal{V}$ et $aR_xb \Leftrightarrow (a = \emptyset \wedge b = \{x\})$. En effet, $P \simeq \mathcal{P}(X)$ ce qui transporte T sur $\mathcal{S}$, et traduit $(\forall x \in X, u_x \lceil R_x \rceil v_x)$ en $A \subset B$. □

Corollaire. *Si $X \subset Y$ (ou s'il existe une injection de X dans Y) et si Y est fini alors X est fini.*

Proposition. *Pour toute union finie $U = \bigcup_{x \in X} A_x$, on a U fini ssi tous les A_i sont finis.*

Preuve: commençant par le cas où les A_x sont une partition de U, le résultat traduit le théorème appliqué à la famille des $E_x = \mathcal{P}(A_x)$ munis de $\mathcal{S}$, avec $\mathcal{P}(U) \simeq \prod_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)$.

Dans le cas général, si tous les A_i sont finis, alors U est fini comme image de la surjection canonique de $\coprod_{x \in X} A_x$ dans U. Réciproquement, si U est fini alors $A_x \subset U$ aussi. □

Corollaire. *Si X et Y sont des ensembles finis alors $X \times Y$ est fini.*

Lemme. *Soit X un ensemble et $K \subset \mathcal{P}(X)$ tel que $\emptyset \in K$, $(\forall x \in X, \{x\} \in K)$ et $(\forall A, B \in K, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in K)$. Alors K contient toutes les parties finies de X.*

Preuve: Soient $A, B \subset X$ tels que $A\ \mathcal{S}\ B$. Il existe $x \in X$ tel que $A \cap \{x\} = \emptyset$, $B = A \cup \{x\}$ et $\{x\} \in K$, de sorte que $(A \in K \Rightarrow B \in K)$. Donc $K \in \mathrm{Cut}(\mathcal{S})$, et $\emptyset \in K$ permet de conclure. □

Théorème du choix fini. *Pour tout ensemble fini X,* $\mathrm{Choix}\, X$.

Proposition. *Tout produit fini d'ensembles finis est fini.*

Déduisons du lemme ces deux résultats en parallèle.
Soit donc $(E_x)_{x \in X}$ une famille finie d'ensembles (non vides, resp. finis).
Notons $\forall A \subset X$, $P_A = \prod_{x \in A} E_x$, et soit $K = \{A \subset X | P_A$ est fini , resp. $\neq \emptyset\}$.
De $P_\emptyset = \{0\}$ on déduit $\emptyset \in K$. Puis, $\forall x \in X, P_{\{x\}} \simeq E_x$ donc $\{x\} \in K$.
Enfin, $\forall A, B \subset X, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P_{A \cup B} \simeq P_A \times P_B$ donc $(A \in K \wedge B \in K) \Rightarrow A \cup B \in K$.
Or X est fini donc $X \in K$. □

Théorème. *Soit X un ensemble, $E = \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{F} \subset E$ l'ensemble des parties finies de X. Soit $f \in E^E$ tel que $\forall A \in E, A \in \mathcal{F} \vee f(A) = \emptyset$. Notant encore $\forall A \subset E, f_A = (\mathcal{P}(A) \ni B \mapsto f(B) \cap A)$,*

$$\forall x \in X, x \in \lceil f \rceil(\emptyset) \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{F}, x \in A \wedge \lceil f_A \rceil(\emptyset) = A)$$
$$\forall B \subset X, \forall x \in X, x \in \lceil f \rceil(B) \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{F}, x \in A \wedge \lceil f_A \rceil(A \cap B) = A)$$

La deuxième formule découle de la première en remplaçant $f(\emptyset)$ par $f(\emptyset) \cup B$. La réciproque étant claire, il suffit de montrer l'implication directe. Définissons

$$K = \{x \in X | \exists A \in \mathcal{F}, x \in A \wedge \lceil f_A \rceil(\emptyset) = A\}.$$

Pour tout $B \subset K$ et tout $y \in f(B)$, on est dans un cas où B fini. Par le théorème du choix fini,

$$\exists A \in \mathcal{F}^B, \forall x \in B, x \in A_x \wedge \lceil f_{A_x} \rceil(\emptyset) = A_x.$$

Soit $C = \{y\} \cup \bigcup_{x \in B} A_x$. Il est fini, comme union finie d'ensembles finis.
Pour tout $x \in B$, on a $\lceil f_{A_x} \rceil(\emptyset) = A_x \subset C$ donc $A_x \subset \lceil f_C \rceil(\emptyset)$.
Or $\forall x \in B, x \in A_x$ donc d'une part $B \subset C$, d'autre part $B \subset \lceil f_C \rceil(\emptyset)$.
Or $y \in f_C(B)$ donc $y \in \lceil f_C \rceil(\emptyset)$. Finalement $\lceil f_C \rceil(\emptyset) = C$, donc $y \in K$.
On conclut: $\forall B \subset K, f(B) \subset K$, donc $\lceil f \rceil(\emptyset) \subset K$. □

Exemple: $\forall R \in \mathcal{B}_X, \forall x, y \in X, x\ \lceil R \rceil\ y \Leftrightarrow \exists A$ fini $\subset X, x \in A \wedge y \in A \wedge x\ \lceil R_{|A} \rceil\ y$.
Par ailleurs on peut noter que $\forall B \subset A, \nearrow(f_A)(B) = \nearrow f(B) \cap A$.

Corollaire. *Pour toute clôture h sur E, $(\exists f \in E^E, h = \lceil f \rceil \wedge \forall A \in E, A \in \mathcal{F} \vee f(A) = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall B \in E, \forall x \in h(B), \exists A$ fini $\subset B, x \in h(A))$. Une telle clôture est dite* finitaire.

3.9. Relation d'équivalence engendrée, et autres

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions de domaine X, et $f = \prod_{i \in I} f_i \in (\prod_{i \in I} \mathrm{Im}\, f_i)^X$. Alors

$$\forall x, y \in X, (f(x) = f(y)) \Leftrightarrow (\forall i \in I, f_i(x) = f_i(y)) \quad \text{i.e.} \underset{f}{\sim} = \inf\{\underset{f_i}{\sim} | i \in I\}.$$

Ceci illustre le fait que l'ensemble des relations d'équivalence sur X est stable par borne inférieure.

Autre méthode: l'ensemble des préordres est stable par borne inférieure; de même pour l'ensemble des relations symétriques. Donc la borne inférieure d'un ensemble de relations d'équivalence est un préordre symétrique, donc une relation d'équivalence.

Pour toute relation binaire R, on appelle *relation d'équivalence engendrée* par R, la plus petite relation d'équivalence supérieure à R. C'est le préordre engendré par $(x, y) \mapsto (xRy \vee yRx)$, (puisque le préordre engendré par une relation symétrique est symétrique).

Dans la bijection canonique entre préordres R sur X et ensembles F de parties de X stables par unions et intersections, les relations d'équivalence correspondent aux ensembles F également stables par complémentarité ($\complement_X[F] \subset F$, ce qu'on peut aussi écrire $\complement_X[F] = F$).

Les notions de préordre engendré et de relation d'équivalence engendrée, sont des exemples d'une notion générale de relation binaire d'un certain type engendrée par une relation binaire R sur X, pour tout type de relation binaire défini par un système d'axiomes, tous de la forme : (une conjonction d'énoncés $R(t, t')$ où t, t' sont des termes indépendants de R) implique (un autre énoncé $R(t, t')$ pour d'autres t, t').

En effet, un tel système d'axiomes se traduit en une fonction f de $\mathcal{P}(X \times X)$ dans lui-même (ou encore une partie de $\mathcal{P}(X \times X) \times (X \times X)$), et l'obéissance d'une relation à ces axiomes signifie son appartenance à $\top(f)$. De plus, chaque axiome n'utilisant qu'une liste finie de conditions, le dernier théorème indique que, notant R' la relation ainsi engendrée par R, tout énoncé $R'(x, x')$ avec x et x' donnés, est vrai ssi il admet une démonstration finie dont chaque étape consiste à déduire, de la véracité des prémisses d'un certain axiome, celle de sa conclusion.

Ultérieurement, nous généraliserons encore ce procédé en remplaçant la relation binaire par un système de relations d'arités quelconques entre divers ensembles.

Proposition. *Soit $R \in \mathcal{B}_X$. La plus petite relation transitive T supérieure à R, appelée la* clôture transitive *de R, satisfait*

$$\forall x, y \in X, xTy \Leftrightarrow (\exists z \in X, x\ R\ z \wedge z\ \lceil R \rceil\ y) \Leftrightarrow (\exists z \in X, x\ \lceil R \rceil\ z \wedge z\ R\ y)$$
$$\forall x, y \in X, x\ \lceil R \rceil\ y \Leftrightarrow (xTy \vee x = y).$$

Preuve: Soit $T' = (x, y) \mapsto (\exists z \in X, x\ R\ z \wedge z\ \lceil R \rceil\ y)$. Suivant les notations de 3.6., $\overrightarrow{T'} = h \circ \overrightarrow{R}$. Par définition de h, T' est la plus petite relation supérieure à R telle que $g \circ \overrightarrow{T'} < \overrightarrow{T'}$, i.e. telle que

$$\forall x, y, z \in X, xT'y \wedge yRz \Rightarrow xT'z.$$

Or T satisfait les 2 conditions donc $T' < T$. L'autre inégalité $T < T'$ s'obtient par la transitivité de T': $\forall x, y, z \in X, xT'y \wedge yT'z \Rightarrow xT'y \wedge y\ \lceil R \rceil\ z \Rightarrow xT'z$.

L'autre équivalence en résulte par symétrie. La deuxième formule se vérifie facilement directement (voyant que $(xTy \vee x = y)$ est un préordre), ou d'après le théorème du point fixe. $\square$

3.10. Relations bien-fondées

Soit un ensemble X muni d'une relation binaire R, et $E = \mathcal{P}(X)$. Considérons $\overleftarrow{R}^{\bullet} \in E^E$:

$$\forall A \subset X, \forall y \in X, y \in \overleftarrow{R}^{\bullet}(A) \Leftrightarrow \overleftarrow{R}(y) = A.$$

Alors notons $\mathcal{D}_R = \nearrow(\overleftarrow{R}^{\bullet})$, i.e.

$$\forall A \subset X, \forall y \in X, y \in \mathcal{D}_R(A) \Leftrightarrow \overleftarrow{R}(y) \subset A$$
$$\forall A \subset X, A \subset \mathcal{D}_R(A) \Leftrightarrow A \in \mathrm{Cut}({}^tR).$$

On remarque son lien avec le g défini pour les préordres engendrés, par $\mathcal{D}_R = \complement_X \circ g \circ \complement_X$.

Notons $\mathcal{F}_R = \lceil \overleftarrow{R}^{\bullet} \rceil \in E^E$ la clôture correspondante. La relation $x \in \mathcal{F}_R(B)$ entre $B \in E$ et $x \in X$ se lira *x est fondé sur B par R*, et se traduit par les énoncés équivalents suivants:

$$\forall A \subset X, (B \subset A \wedge \forall y \in X, \overleftarrow{R}(y) \subset A \Rightarrow y \in A) \Rightarrow x \in A$$
$$\forall A \subset \complement_X B, (\forall y \in A, A \cap \overleftarrow{R}(y) \neq \emptyset) \Rightarrow x \notin A$$
$$\forall A \subset \complement_X B, A \subset R_*(A) \Rightarrow x \notin A$$
$$\forall A \subset X, x \in A \wedge A \subset R_*(A) \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$
$$\forall A \subset \complement_X B, x \in A \Rightarrow (\exists y \in A, A \cap \overleftarrow{R}(y) = \emptyset)$$

On dit que l'ensemble X muni de R est bien-fondé (ou que la relation R est bien-fondée) lorsque $\mathcal{F}_R(\emptyset) = X$, ce qui se traduit par les formules équivalentes

$$\forall A \subset X, (\forall x \in X, \overleftarrow{R}(x) \subset A \Rightarrow x \in A) \Rightarrow A = X$$
$$\forall A \subset X, (\forall x \in A\ \exists y \in A, yRx) \Rightarrow A = \emptyset$$
$$\forall A \subset X, A \subset R_*(A) \Rightarrow A = \emptyset$$
$$\forall A \subset X, A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in A, A \cap \overleftarrow{R}(x) = \emptyset)$$

Etant donnés un ensemble X muni d'une relation bien-fondée R, et un énoncé P de variable $x \in X$, on appelle *démonstration par induction* de l'énoncé $(\forall x \in X, P(x))$, une démonstration qui pour tout $x \in X$, déduit $P(x)$ de l'hypothèse $\forall y \in \overleftarrow{R}(x), P(y)$. En effet, l'ensemble $A = \{x \in X | P(x)\}$ satisfaisant alors $\forall x \in X, \overleftarrow{R}(x) \subset A \Rightarrow x \in A$, il en résulte $A = X$.

Proposition. *Soient X et Y deux ensembles, $R \in \mathcal{B}_X, S \in \mathcal{B}_Y, u \in Y^X$. Alors*
1) Si $\forall x \in X, \overleftarrow{S}(u(x)) \subset u[\overleftarrow{R}(x)]$, alors $u_* \circ \mathcal{F}_R < \mathcal{F}_S \circ u_*$ et $\mathcal{F}_R \circ u^* < u^* \circ \mathcal{F}_S$.
2) Si $\forall x \in X, u[\overleftarrow{R}(x)] \subset \overleftarrow{S}(u(x))$, alors $u^* \circ \mathcal{F}_S < \mathcal{F}_R \circ u^*$ et si S est bien-fondée alors R aussi.

Cela résulte des formules de transport de clôture en traduisant les hypothèses ainsi:

$$\begin{aligned}(\forall x \in X, \overleftarrow{S}(u(x)) \subset u[\overleftarrow{R}(x)]) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall A \subset X, \overleftarrow{R}(x) = A \Rightarrow \overleftarrow{S}(u(x)) \subset u[A] \\ &\Leftrightarrow \forall A \subset X, \forall x \in X, x \in \overleftarrow{R}^\bullet(A) \Rightarrow u(x) \in \mathcal{D}_S(u[A]) \\ &\Leftrightarrow \forall A \subset X, u[\overleftarrow{R}^\bullet(A)] \subset \mathcal{D}_S(u[A]))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\forall x \in X, u[\overleftarrow{R}(x)] \subset \overleftarrow{S}(u(x))) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall B \subset Y, \overleftarrow{S}(u(x)) = B \Rightarrow \overleftarrow{R}(x) \subset u^*(B) \\ &\Leftrightarrow \forall B \subset Y, \forall x \in X, u(x) \in \overleftarrow{S}^\bullet(B) \Rightarrow x \in \mathcal{D}_R(u^*(B)) \\ &\Leftrightarrow \forall B \subset Y, u^*(\overleftarrow{S}^\bullet(B)) \subset \mathcal{D}_R(u^*(B))\end{aligned}$$ □

Corollaire. *Soient deux relations binaires R et R' sur un même ensemble. Si $R < R'$ et R' est bien-fondée alors R est bien-fondée.*

Proposition. *Soit une relation binaire R sur un ensemble X, soit $K \subset X$ tel que $K \in \mathrm{Cut}({}^tR)$, et soit R' la restriction de R à K. Alors $\forall B \subset X, \mathcal{F}_{R'}(K \cap B) = K \cap \mathcal{F}_R(B)$. Si de plus $K \in \mathrm{Im}\,\mathcal{F}_R$ alors $\forall B \subset K, \mathcal{F}_{R'}(B) = \mathcal{F}_R(B)$.*

Ceci résulte de la proposition précédente, avec $u = \mathrm{Id}_K$ de K dans X; le dernier point vient comme cas particulier des propriétés des f_A. □

Proposition. *Soit une relation binaire R sur un ensemble X, et $z \in X$. On a équivalence entre :*
1) $z \in \mathcal{F}_R(\emptyset)$
2) $\overleftarrow{R}(z) \subset \mathcal{F}_R(\emptyset)$
3) $\overleftarrow{\lceil R \rceil}(z) \subset \mathcal{F}_R(\emptyset)$
4) la restriction de R à $\overleftarrow{\lceil R \rceil}(z)$ est bien-fondée.

De $\mathcal{F}_R(\emptyset) \in \mathrm{Fix}\,\mathcal{D}_R$ on tire d'une part 1) $\Leftrightarrow$ 2), d'autre part $\mathcal{F}_R(\emptyset) \in \mathrm{Cut}({}^tR)$ donc 1) $\Leftrightarrow$ 3).
Enfin, 3) $\Leftrightarrow$ 4) vient de la dernière proposition avec $\overleftarrow{\lceil R \rceil}(z) \in \mathrm{Cut}({}^tR)$. □

Proposition. *La clôture transitive T d'une relation bien-fondée R est bien-fondée.*

Preuve: $\forall A \subset X, ((A \subset T_*A) \wedge (B = A \cup T_*A = \lceil R \rceil_* A)) \Rightarrow A \subset B = T_*A = R_*B = \emptyset$. □

Proposition. *Toute relation bien-fondée est antiréflexive et antisymétrique.*

Preuve: $\forall x \in X, \exists y \in \{x\}, \{x\} \cap \overleftarrow{R}(y) = \emptyset$ donc R est antiréflexive. Pour l'antisymétrie, on peut soit utiliser $A = \{x, y\}$, soit noter que T étant antiréflexive est aussi antisymétrique. □

Proposition. *Le préordre engendré par une relation bien-fondée est un ordre.*

Cela résulte de $x \lceil R \rceil y \Leftrightarrow (xTy \vee x = y)$ et de l'antisymétrie de T. □

Proposition. *Soit R une relation bien-fondée sur un ensemble X tel que $\forall x \in X, \overleftarrow{R}(x)$ est fini. Alors $\forall x \in X, \overleftarrow{\lceil R\rceil}(x)$ est fini.*

Preuve 1 par induction: soit $y \in X$ tel que $\forall x \in \overleftarrow{R}(y), \overleftarrow{\lceil R\rceil}(x)$ est fini. Alors

$$\overleftarrow{\lceil R\rceil}(y) = \{y\} \cup \bigcup_{x\in\overleftarrow{R}(y)} \overleftarrow{\lceil R\rceil}(x)$$

étant une union finie d'ensembles finis est fini.
Preuve 2: $\forall x \in X, \exists A$ fini $\subset X, x \in A \wedge \lceil(\overleftarrow{R}^{\bullet})_A\rceil(\emptyset) = A$. Par le théorème du point fixe, $A \subset \mathcal{D}_R(A)$ donc $A \in \mathrm{Cut}({}^tR)$ donc $\overleftarrow{\lceil R\rceil}(x) \subset A$. □

Théorème (principe de définition par induction). *Soient une relation bien-fondée R sur un ensemble X, et une famille d'ensembles $(E_x)_{x\in X}$. Introduisons les notations*

$$P = \prod_{y\in X} E_y$$
$$\forall x \in X, P_x = \prod_{y\in\overleftarrow{R}(x)} E_y$$
$$\forall x \in X, \forall f \in P, r_x(f) = f_{|\overleftarrow{R}(x)} \in P_x$$

Enfin, soit $\phi \in \prod_{x\in X} E_x^{P_x}$, autrement dit pour tout $x \in X$, on a une fonction $\phi_x : P_x \to E_x$. Alors $\exists! \psi \in P, \forall x \in X, \psi(x) = \phi_x(r_x(\psi))$

Preuve. Soit $F = \coprod_{x\in X} E_x$, et $K = \{h \in P | \forall x \in X, h(x) = \phi_x(r_x(h))\}$.

Soit $g = \nearrow(\overrightarrow{S}) \in \mathcal{P}(F)^{\mathcal{P}(F)}$ où $\mathrm{Gr}(S) = \{(\mathrm{Gr}(u), (x, \phi_x(u))) | x \in X, u \in P_x\}$, i.e.

$$\forall G \subset F, g(G) = \{(x, \phi_x(u)) | x \in X, u \in P_x \wedge \mathrm{Gr}(u) \subset G\}.$$

$\forall G \subset F$, soit $A = \{x \in X | \exists! y \in E_x, (x, y) \in G\}$, et $h \in \prod_{x\in A} E_x$ défini par $\mathrm{Gr}\, h \subset G$.

$$\forall x \in X, \overleftarrow{R}(x) \subset A \Rightarrow (\forall y \in E_x, (x, y) \in g(G) \Leftrightarrow y = \phi_x(h_{|\overleftarrow{R}(x)})) \Rightarrow \exists! y \in E_x, (x, y) \in g(G)$$

$$G \in \mathrm{Fix}\, g \Rightarrow (\forall x\in X, \overleftarrow{R}(x) \subset A \Rightarrow (\exists! y\in E_x, (x, y) \in G) \Rightarrow x \in A) \Rightarrow A = X \Rightarrow (h \in P \wedge G = \mathrm{Gr}\, h)$$
$$\forall h \in P, \mathrm{Gr}\, h \in \mathrm{Fix}\, g \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in F, (x, y) \in \mathrm{Gr}\, h \Leftrightarrow y = \phi_x(r_x(h))) \Leftrightarrow h \in K$$
$$\exists \psi \in K, \mathrm{Gr}\, \psi : \min \mathrm{Fix}\, g \wedge \forall h \in P, (h \in K \Rightarrow \mathrm{Gr}(h) \in \mathrm{Fix}\, g \Rightarrow \mathrm{Gr}(\psi) \subset \mathrm{Gr}(h) \Rightarrow \psi = h).$$ □

Proposition. *Avec les mêmes notations, si $\phi, \phi' \in \prod_{x\in X} E_x^{P_x}$, $\psi, \psi' \in P$ définis par induction respectivement par ϕ et ϕ', si $A \in \mathrm{Cut}({}^tR)$ et $\phi_{|A} = \phi'_{|A}$, alors $\psi_{|A} = \psi'_{|A}$. En particulier pour tout $y \in X$ fixé, avec $A = \overleftarrow{\lceil R\rceil}(y)$, si $\phi_{|A} = \phi'_{|A}$, alors $\psi(y) = \psi'(y)$.*

Il suffit d'appliquer le résultat d'unicité à l'ensemble A muni de $\phi_{|A} \in \prod_{x\in A} E_x^{P_x}$ sachant que la restriction R' de R à A est bien-fondée et que de $A \in \mathrm{Cut}({}^tR)$ il résulte $\forall x \in A, \overleftarrow{R}(x) = \overleftarrow{R'}(x)$, de sorte que les définitions de P_x dans X et dans A coïncident. □

Exemple 1. *Le principe de récurrence est le cas particulier de l'induction sur $\mathbb{N}$ muni de la relation bien-fondée $(x, y) \mapsto (y = x+1)$. Par contre la même formule sur $\mathbb{Z}$ ne fait pas une relation bien-fondée.*

Exemple 2. *Si R et S sont deux relations binaires sur E, où R est bien-fondée et $\forall x, y \in E, (xSy) \Leftrightarrow (x = y \vee \exists z \in E, (xSz \wedge zRy))$, alors $S = \lceil R\rceil$.*

En effet, cette formule se réécrit

$$\forall y \in E, \overleftarrow{S}(y) = \{y\} \cup \bigcup_{z\in\overleftarrow{R}(y)} \overleftarrow{S}(z)$$

ce qui définit $\overleftarrow{S}$ par induction. Or $\overleftarrow{\lceil R\rceil}$ satisfait la même formule donc $S = \lceil R\rceil$.

On peut aussi voir cela comme étant pour tout x une définition de $(y \mapsto (xSy))$ par induction.