Fondements des mathématiques

Sylvain Poirier
sylvainpoirier.fr/logique

1. Théorie des ensembles (démarrage)

1.1. Introduction au fondement des mathématiques

Les mathématiques sont l'étude des systèmes d'objets élémentaires, dont l'existence est abstraite (indépendante du monde physique), et dont chaque constituant (élément, relation) a pour seule nature le fait d'être exact, sans ambiguïté : deux objets sont égaux ou différents, reliés ou non, une opération donne un résultat exactement, etc.

La logique mathématique est l'étude du fondement des mathématiques, description mathématique du monde des mathématiques lui-même. Les mathématiques se divisent en théories, cadres implicites ou explicites de tout travail mathématique. Chaque théorie est l'étude des systèmes (ou "mondes"...) de forme décrite d'une manière précise (mathématique) appelée son *fondement* : listes de types de constituants (notions), structures qui les relient, et formules de propriétés à satisfaire appelées *axiomes*.

Il y a aussi une hiérarchie entre théories, certaines pouvant en fonder d'autres. Notamment, les fondements de plusieurs théories peuvent avoir une partie commune formant une théorie plus simple, dont les développements sont réapplicables à toutes.

Les mathématiques, et chaque théorie, peuvent être vues de manière soit réaliste, soit formaliste.

Le point de vue réaliste (aussi appelé *idéaliste* ou *platonicien*) s'attache aux mondes ou systèmes étudiés, vus comme réalités préexistantes dont l'étude serait une exploration (Platon l'appelait un ressouvenir). C'est l'approche de l'intuition qui flaire l'ordre global des choses.

Le point de vue formaliste est l'approche syntaxique et rigoureuse d'une théorie, partant de son fondement (expression formelle), et cheminant conformément aux règles.

D'abord et à chaque instant, le fondement des mathématiques, ou d'une théorie, est ce qu'on en connait ou qu'on a choisi d'accepter, d'après quoi on peut avancer. On avance en choisissant des développements possibles, nouvelles notions et connaissances qui résultent du fondement précédent et s'y ajoutent pour former le fondement suivant. Ce qui n'est pas développé à un instant pourra toujours l'être plus tard car le fondement qui pouvait l'engendrer subsiste. Dès lors les développements sont au moins l'exploration d'une réalité définie comme totalité des développements possibles.

Généralement, un travail fondamental est de développer, à partir d'un fondement initial simple, un fondement plus complet facilitant le mieux d'autres développements intéressants.

Bien sûr, la pensée humaine ne peut pas opérer de manière totalement réaliste, mais seulement effectuer des raisonnements traduisibles en développement formel à partir d'un fondement (protégeant des erreurs de l'intuition). De plus, la réalité du monde mathématique dépasse toute conception réaliste qu'on peut en avoir: toute invocation d'une réalité doit être précisée par une théorie, mais aucune théorie ne pourra épuiser la réalité mathématique capable de s'élargir au-delà de toute totalité un instant supposée. Heureusement, certaines théories relativement simples peuvent modéliser des réalités d'étendue largement suffisante pour la plupart des besoins.

Mais le formalisme n'est pas non plus absolu, chaque formalisme n'ayant de clarté et d'élémentarité que relative: il a dû être choisi, défini et motivé plus ou moins arbitrairement de l'extérieur, quelque part dans la réalité mathématique, intuitivement ou par un formalisme préexistant. Une vision intuitive d'un problème peut sembler plus claire qu'un raisonnement rigoureux. En pratique, on utilise des preuves semi-formelles, juste assez rigoureuses pour une intuition qui "sent" qu'une formalisation totale serait possible, sans l'avoir explicitée complètement.

Malgré l'élémentarité des objets mathématiques, le fondement des mathématiques (avec recherche du fondement de chaque fondement trouvé, à l'inverse d'un travail mathématique ordinaire qui admet son fondement), s'avère assez complexe (quoique bien moins qu'une théorie du tout de la physique dont la complexité s'annonce monstrueuse): au lieu d'un point de départ, il ressemble à une vaste dynamique quasiment bouclée sur elle-même, formée d'étapes plus ou moins difficiles.

Cette situation ressemble à celle des dictionnaires définissant chaque mot par d'autres mots, ou de cette autre science des systèmes finis qu'est l'informatique. On peut en effet simplement utiliser les ordinateurs, sachant ce qu'on fait sans savoir pourquoi cela fonctionne. Leur fonctionnement se fonde sur des logiciels qui furent rédigés dans un certain langage puis compilés par des logiciels, ainsi que sur le matériel et l'architecture du processeur dont la conception et la fabrication furent assistées par ordinateur. Et c'est nettement mieux ainsi qu'à la naissance de cette discipline.

Ce cycle *des* fondements des mathématiques, est véritablement fondateur, ses parties étant riches de notions utiles à différentes branches des mathématiques. Il est dominé par deux théories:

La *théorie des ensembles* étudie les objets mathématiques, des plus simples aux plus complexes comme les systèmes infinis (dans un langage fini). Mais il y a une diversité (potentiellement infinie) de théories des ensembles possibles (non équivalentes).

La *théorie des modèles* est la théorie des théories avec leur formalisme (les règles du langage mathématique: structure des formules comme systèmes de symboles, règles de démonstration), et des systèmes (mondes), appelés *modèles*, pouvant constituer leur objet d'étude (leur signification). Elle est essentiellement unique, donnant une signification claire et définitive aux concepts de théorie et de théorème de chaque théorie (et mériterait d'être introduite au niveau licence, en laissant intuitives les notions de formules et de démonstrations).

Chacune est le cadre convenable pour formaliser l'autre: toute théorie des ensembles se formalise naturellement comme théorie axiomatique décrite par la théorie des modèles; laquelle s'obtient par développement de la théorie des ensembles (construisant théories et modèles comme objets particuliers, ce qui est bien plus raisonnable que d'axiomatiser la théorie des modèles directement). Mais ces formalisations nécessiteront un long travail pour être complétées.

Les logiciens ont conçu et adopté une théorie axiomatique des ensembles dite de Zermelo-Fraenkel (ZF, ou ZFC avec axiome du choix) convenant à leur besoin de théorie puissante dans un cycle fondateur élargi, permettant de démontrer beaucoup d'énoncés difficiles ou leur indémontrabilité.

Les mathématiques démarrent en introduisant certaines notions simples (dans le cycle fondateur), qui puissent sembler ne pas s'appuyer sur d'autres notions. Il est notamment naturel de démarrer par une théorie des ensembles dite *naïve* car non totalement formalisée axiomatiquement. Les théories naïves des ensembles sont habituellement présentées comme forme vulgarisée ou implicite de ZFC, aux axiomes supposés nécessaires ou évidents. Mais le sens et l'usage des axiomes viennent d'autres évidences (la théorie des modèles), à quoi ils visent à ajouter des informations supplémentaires.

Or ZFC n'est pas une reférence idéale pour une théorie naïve. Ses axiomes méritent des justifications plus subtiles et complexes que celle de simples intuituions historiquement sélectionnées pour la cohérence et la commodité du système qui en résulte. Les multiples outils (notions et théorèmes) nécessaires à la pratique des mathématiques n'en résultent que par des développements complexes. Il suppose aussi que tout objet est un ensemble, et donc un ensemble d'ensembles indéfiniment, construits sur l'ensemble vide; mais en pratique, beaucoup d'objets ne s'utilisent que comme purs éléments. Le rôle de ces éléments pouvant être joué par des ensembles, cet usage n'a pas besoin d'être formalisé, mais constitue une dissemblance entre la "théorie" et la pratique des mathématiques.

1.2. Variables, ensembles, fonctions et opérations

Nous démarrerons les mathématiques par une théorie des ensembles mieux adaptée (directement conforme à la pratique des mathématiques), partant de 3 notions (sortes d'objets): éléments, ensembles et fonctions. Son formalisme sera progressivement développé au rythme des besoins, avec d'autres notions (interprétables comme primitives ou comme définies au moyen des premières), symboles et axiomes (parfois optionnels). D'autres notions et explications sur la perspective des fondements (théorie des modèles) et ses principales subtilités (paradoxes) complèteront l'exposé.

Constantes

Un *symbole de constante* est un symbole désignant un objet précis, appelé sa *valeur*. Exemples: 0,1, $\mathbb{N}$. Ceux du langage courant sont les noms propres et les noms précédés d'un article défini ("le", "la") sans complément.

Variables libres ou liées

Un *symbole de variable* (ou *une variable*) est un symbole sans valeur fixe. Chaque interprétation possible lui donne une valeur particulière et le voit donc comme une constante.

On peut l'imaginer comme délimitée par une boite. De l'intérieur de la boite, la variable est utilisable comme une constante (gardant une même valeur): elle est dite *libre* ou *fixée*. Vue du dehors, ses valeurs possibles sont perçues globalement: elle est dite *liée*.

Domaines et ensembles

On appelle *domaine* d'une variable, sa signification vue comme liée: c'est la "connaissance" de la totalité de ses valeurs possibles ou autorisées appelées les *élements* de ce domaine. Tout domaine d'une variable est appelé un *ensemble*. (Cette "connaissance" est une entité abstraite, capable d'englober des infinités d'objets, contrairement à l'esprit humain; les éléments sont vus en vrac: sans ordre ni égard à leur contexte). Une variable admet un domaine lorsqu'elle peut être liée, qu'on dispose d'un point de vue englobant toutes ses valeurs possibles. On dit qu'une variable *parcourt* un ensemble, lorsqu'elle est liée de domaine cet ensemble. On peut introduire autant qu'on veut de variables parcourant tout ensemble donné, indépendantes entre elles et des autres variables en présence.

Cantor définissait un ensemble comme "*un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée*". "*Si la totalité des éléments d'une multiplicité peut être pensée comme "existant simultanément", de telle sorte qu'il soit possible de la concevoir comme un "seul objet" (ou un "objet achevé"), je la nomme une multiplicité consistante ou un "ensemble".*" (Nous venons d'exprimer cette "multiplicité" comme celle des valeurs d'une variable).

Il décrit le cas contraire comme une "*multiplicité inconsistante*" où "*l'admission d'une coexistence de tous ses éléments mène à une contradiction*". Mais la non-contradiction ne peut pas suffire comme définition générale des ensembles: elle est souvent elle-même indémontrable (par l'incomplétude des mathématiques, voir "compléments métamathématiques"); non-contradiction ne vaut pas vérité, et deux coexistences séparément consistantes pourraient se contredire (paradoxe de l'omnipotence).

Le renommage systématique d'une variable liée dans tout l'intérieur de sa boite, en un autre symbole inutilisé dans le même contexte (la même boite), de même domaine, ne change pas la signification du tout. En pratique, une même lettre peut servir à désigner plusieurs variables liées séparées (dont les boites sont séparées, jamais plus d'une n'est libre à la fois). Ces variables peuvent chacune séparément prendre des valeurs différentes, faute d'interprétation conjointe qui puisse les comparer. Le langage courant le fait sans cesse, ne disposant que de fort peu de symboles de variables ("il", "elle", . . .).

Notion de fonction

On appelle *fonction* tout objet f se comportant comme variable dépendant d'une autre variable appelée son *argument* de domaine noté $\mathrm{Dom}\, f$: dès que cet argument est fixé (et noté comme symbole x), f devient une constante (notée $f(x)$). Ainsi f est constitué des données suivantes:
- Un ensemble appelé *domaine de* f et noté $\mathrm{Dom}\, f$.
- Pour chaque élément x de $\mathrm{Dom}\, f$, un objet noté $f(x)$, appelé *image de* x *par* f ou *valeur de* f *en* x.

Notion d'opération

Une *opération* est une fonction généralisée au cas d'une liste finie d'arguments (variables de domaines respectifs donnés), donnant un résultat (une valeur) quand tous ses arguments sont fixes. Le nombre n des arguments est appelé son *arité*; l'opération est dite n*-aire*. Elle est dite *unaire* si $n = 1$ (c'est une fonction), *binaire* si $n = 2$, *ternaire* si $n = 3$. . . Les opérations d'arité 0 sont inutiles car remplaçables par leur valeur; on verra comment construire celles d'arité > 1 au moyen des fonctions.

La valeur d'une opération binaire f en ses arguments fixés notés (de valeurs données par) x et y, se note $f(x, y)$. Ainsi, au lieu de symboles, les arguments sont figurés par les espaces à gauche et à droite dans la parenthèse, à remplir par toute expression leur donnant des valeurs voulues.

1.3. Structure des théories

Nous allons d'abord évoquer plusieurs théories et leurs modèles, donc nous situer en théorie des modèles. Puis concentrer l'étude sur une théorie (des ensembles) avec un modèle supposé fixe: les variables "théorie" et "modèle" étant fixées, nous serons en *théorie du modèle*.

Chaque théorie a ses propres *notions*, couramment désignées par des noms communs, et désignant dans chaque modèle les domaines possibles de ses variables. La théorie *des* modèles admet les notions de théorie et de modèle, invisibles en théorie *du* modèle du fait de leur fixation.

Tout modèle M d'une théorie T donne un modèle $M_1 = [T, M]$ à la théorie du modèle (T_1). Les noms communs des notions de T_1 désignant normalement leur interprétation dans M_1, on leur ajoutera le préfixe méta- pour désigner leur interprétation dans l'autre modèle $[T_1, M_1]$ de T_1.

Un *objet* (d'une théorie dans un modèle), est tout élement d'une notion (valeur possible d'une variable). Par cette notion d'objet, la théorie du modèle distingue les objets de T dans M parmi ses propres objets dans M_1 (les méta-objets). Tout objet est donc un méta-objet; mais en pratique on réservera le nom de *méta-objet* à ceux d'entre eux qui ne sont pas des objets. Contrairement à la théorie des ensembles, la théorie du modèle donne à toute variable de sa théorie étudiée un domaine parmi les notions, mais ne le regarde que comme méta-objet.

On appellera *théorie générique* toute théorie présentée conformément à un certain format standard (décrite par une théorie du modèle plus précise), en lequel seront traduisibles les théories que nous évoquerons. Ce format clarifie notamment la gestion des variables en n'admettant comme notions que des *types* (en nombre fini pour chaque théorie) classifiant à la fois variables et objets : chaque objet n'appartiendra qu'à un seul type, celui des variables qui peuvent le désigner.

Voici quelques exemples de notions de diverses théories.

Théorie	Objets (notions)
Théorie générique	Eléments purs classés par types
Théorie des ensembles	Eléments, ensembles, fonctions (, opérations, relations, uplets. . .)
Théorie des modèles	Théories génériques, modèles et leurs constituants.
Théorie du modèle	Objets, symboles, notions, expressions, structures, axiomes. . .
Arithmétique	Nombres entiers
Algèbre linéaire	Vecteurs, scalaires. . .
Géométrie	Points, droites, cercles. . .

Les notions de théorie du modèle classifient les constituants de la théorie (types, symboles, expressions), et ceux du modèle. Les symboles des théories génériques se classent en symboles de variable, de structure (opérateur ou prédicat), connecteurs, et quantificateurs (∀, ∃). Chaque théorie générique se distingue par ses listes de types, de symboles de structure (formant son *langage*), et d'axiomes.

L'autre fondement possible de toute théorie générique (sans théorie du modèle) est sa traduction en théorie des ensembles. Toutes les théories et leurs modèles peuvent ainsi s'intégrer dans une théorie des ensembles munie d'un modèle fixe (aussi baptisé *univers* pour cette raison). Mais seuls les constituants du modèle (et le modèle lui-même) sont par là traduits en objets; ceux de la théorie générique sont traduits en constituants de la théorie des ensembles.

Décrivons les notions de théorie du modèle (la forme d'une théorie générique et de son modèle) par une telle traduction valable pour toute théorie générique: tous les objets seront traduits en éléments purs (contrairement à l'usage de la géométrie présentant les droites comme ensembles de points).

La traduction laisse les symboles de variables tels quels. Les types (abstraits) et les symboles de structure se traduisent tous en symboles de variables libres, qui restent libres tant que le modèle reste fixe. Leurs valeurs sont les principaux constituants du modèle, ceux qui le déterminent.

Les valeurs des types abstraits sont des ensembles d'objets, appelés *types interprétés.*

Les structures

Chaque symbole d'opérateur désigne une opération appelée un *opérateur*, dont chaque argument a pour domaine un type, et les valeurs sont d'un même type; l'arité (ou la liste des arguments présentés comme des espaces), le type abstrait de chaque argument et celui des valeurs sont fixés comme données du symbole. Lorsque l'arité est nulle c'est un symbole de constante, désignant directement un objet fixe. Un opérateur unaire, désignant une fonction, sera appelé *foncteur.*

A cette représentation du modèle s'ajoute de manière standard, un type spécial: celui des *booléens* fait des deux éléments "vrai" et "faux". Une variable de ce type (hors de la théorie) est appelé *variable booléenne.* Son ajout à la liste des types généralise la notion d'opérateur en *para-opérateur.* Un *connecteur* est un para-opérateur dont tous les arguments et les valeurs sont booléens. Un *prédicat* est un para-opérateur à au moins un argument, tous non booléens, et à valeurs booléennes. Une *structure* est un opérateur ou un prédicat.

Chaque théorie admet un symbole d'égalité pour chaque type (prédicat à deux arguments de ce type) abusivement tous notés =, interprétés de manière standard. Ce sont les autres structures (désignées par les autres symboles de structure, données arbitraires de chaque théorie et de son modèle) qui font jouer aux éléments de chaque type, un rôle d'objets parfois complexe.

En théorie des ensembles, les ensembles jouent leur rôle par le prédicat binaire ∈ d'*appartenance* : pour tout élément x et tout ensemble E, on note $x \in E$ (x appartient à E, ou x est élément de E, ou E contient x), lorsque x est une valeur possible d'une variable de domaine E.

Les fonctions jouent leur rôle par le foncteur Dom (donnant leurs domaines) et l'*évaluateur de fonction*, opérateur binaire donnant la valeur $f(x)$ de toute fonction f en tout élément x de $\mathrm{Dom}\, f$.

La théorie des ensembles ZFC se définit comme théorie générique avec un seule type "ensemble", les symboles ∈ et =, et des axiomes. Mais la nôtre ne sera pas générique, et inclura d'autres symboles contribuant à faire jouer leurs rôles aux ensembles, aux fonctions et à d'autres sortes d'objets.

Une théorie du modèle formalisée comme théorie générique donnerait aux types le double rôle de types abstraits et interprétés. Aussi, les mêmes méta-objets pourraient jouer les rôles des symboles de structure et des structures qu'ils désignent (via les méta-structures), sauf que la notion de structure sera étendue à d'autres opérations entre types que celles désignées par les symboles du langage (on ne peut les admettre "toutes" sans dépendre d'un univers extérieur où les trouver, hors sujet ici).

1.4. Termes et formules; connecteurs

Pour toute théorie, on appelle *terme* un assemblage fini d'occurrences de symboles, visant à désigner un objet (sa valeur) une fois fixés le modèle et les valeurs des variables libres. (Une occurrence d'un symbole est un lieu où on le place, par exemple le terme "$x + x$" comporte 2 occurrences de x

et une de $+$). On appelle *formule* un système semblable à un terme mais à valeurs booléennes. Nous appellerons *expression* un terme ou une formule.

Les expressions se construisent successivement, chacune comme donnée (occurrence) d'un symbole appelé son *symbole principal*, et d'une liste d'expressions précédemment construites (et éventuellement de symboles de variables). Ce symbole principal détermine le type de ses valeurs (et donc distingue si c'est un terme ou une formule) et le format de cette liste (le nombre d'entrées et le type de chacune). Pour un symbole de para-opérateur, ce format est donné par la liste de ses arguments.

Les premiers et plus simples termes sont ceux réduits à l'occurence d'un symbole de constante ou de variable, ce qu'on appelle un *terme atomique*. Les constantes booléennes "vrai" et "faux" (connecteurs d'arité 0) forment les premières formules.

Les autres symboles, demandant une liste non vide, nécessitent une convention de présentation de cette liste. La plupart des symboles de para-opérateurs binaires ont la forme d'un caractère séparant les deux arguments (l'addition est notée $x+y$ au lieu du format initial $+(x, y)$ des opérations); d'autres (multiplication, puissance) se présentent implicitement, sans caractère.

D'autres symboles sont notés par plusieurs caractères délimitant les entrées. Les parenthèses peuvent soit composer la notation de symboles comme l'évaluateur de fonction, soit servir à distinguer les sous-expressions et leurs symboles principaux respectifs, comme dans $(x + y)^n$.

Connecteurs

Voici les connecteurs les plus utiles par ordre d'arité $n > 0$, avec leurs propriétés vraies pour toutes valeurs des variables booléennes (remplaçables par des formules) A, B, C.

$n = 1$: le "non" échange les booléens: $\neg(1) \Leftrightarrow 0, \neg(0) \Leftrightarrow 1, \neg(\neg A) \Leftrightarrow A$. Parfois abrégé en barrant le symbole principal de son argument, formant un autre symbole de même format: $(x \neq y) \Leftrightarrow \neg(x = y)$ ("x est différent de y"); $x \notin E \Leftrightarrow \neg(x \in E)$ ("x n'appartient pas à E").

$n = 2$:

et : vaut vrai uniquement lorsque ses deux arguments valent vrai;

ou : vaut vrai sauf lorsque ses deux arguments valent faux;

$\Rightarrow$: $A \Rightarrow B$ peut se lire "A implique B", "A est une *condition suffisante* à B", ou "B est une *condition nécessaire* à A", et signifie $((\neg A) \vee B)$. Etant vrai sauf quand A est vrai et B est faux, il exprime que si A est vrai alors B aussi, mais sinon il ne nous renseigne pas (étant vrai).

La formule $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ est appelée la *contraposée* de $(A \Rightarrow B)$, et lui est équivalente.

$\Leftrightarrow$ (équivaut), égalité entre booléens: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$. Une preuve de $A \Leftrightarrow B$ peut se former d'une preuve de l'implication $(A \Rightarrow B)$, puis de l'autre $(B \Rightarrow A)$ appelée sa *réciproque*.

Sa négation $(A \not\Leftrightarrow B)$ peut se lire comme exerçant $\neg$ sur un argument $(A \Leftrightarrow \neg B)$, ou comme "ou exclusif" $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$. Les négations échangent divers connecteurs:

$$\begin{aligned}
(A \vee B) &\not\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \\
(A \wedge B) &\not\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \\
(A \Rightarrow B) &\not\Leftrightarrow (A \wedge \neg B)
\end{aligned}$$

Cela transforme les propriétés d'associativité et de distributivité en diverses formules:

$$\begin{aligned}
((A \wedge B) \wedge C) &\Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C)) \\
((A \vee B) \vee C) &\Leftrightarrow (A \vee (B \vee C)) \\
(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C) \\
(A \Rightarrow (B \vee C)) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \vee C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A \wedge (B \vee C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \\
(A \vee (B \wedge C)) &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \\
(A \Rightarrow (B \wedge C)) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \\
((A \vee B) \Rightarrow C) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \\
((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) &\Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \Rightarrow C)) \\
(A \wedge (B \Rightarrow C)) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge C))
\end{aligned}$$

$n \geq 3$: les chaînes de "et" $(A \wedge B \wedge C)$ et celles de "ou" $(A \vee B \vee C)$ s'obtiennent en effaçant les parenthèses grâce à l'associativité. L'affirmation d'une chaîne de "et" revient à affirmer tous ses constituants à la fois (successivement). Par ailleurs toute chaîne de formules reliées par des $\Leftrightarrow$ et des $\Rightarrow$ abrégera la succession d'affirmations (lien par des "et") de chaque lien entre formules voisines:

$$
\begin{gathered}
0 \Rightarrow A \Rightarrow A \Rightarrow 1 \\
(\neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow 0) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow 0) \\
(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \\
(A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C) \\
(A \wedge A) \Leftrightarrow (A \wedge 1) \Leftrightarrow A \Leftrightarrow (A \vee A) \Leftrightarrow (A \vee 0) \Leftrightarrow (1 \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow 1) \\
(B \wedge A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B \Rightarrow (A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)
\end{gathered}
$$

Structures définies par des expressions

En théorie du modèle, on appellera *structure* (opérateur ou prédicat) toute opération entre types définie par une expression (terme ou formule) et une liste de ses variables libres qu'on choisit de lier dans le rôle d'arguments. Cette structure dépend des autres variables restant libres, appelées ses *paramètres* (tandis que les variables liées dans l'expression, invisibles de l'extérieur, sont ici oubliées).

Des symboles de structure annexes peuvent être introduits au-delà du langage de la théorie, généralisant en arité non nulle le cas des variables libres à distinguer des constantes. Un tel symbole peut servir à abréger l'expression qui définit une structure voulue; ou s'employer sans définition de manière applicable à toute structure et même plus (opération indéfinissable). Mais la théorie ne peut lier la variation d'un tel symbole qu'en liant les paramètres de l'expression (ou le nombre fini d'expressions) définissant ses valeurs (structures) voulues. Elle ne peut donc pas englober d'un coup toutes les structures d'arité donnée.

Une structure sera dite *invariante* si elle est définie sans paramètre. Toute structure désignée par un symbole du langage est invariante. Tout ajout d'une structure invariante au langage (et de sa définition comme axiome), constitue un développement interne de la théorie, qui en préserve les méta-notions utiles (structure, structure invariante, prouvabilité).

Axiomes de l'égalité

Pour tout foncteur T et tous objets x, y (pouvant abréger des termes avec des paramètres), on a $x = y \Rightarrow T(x) = T(y)$. De même pour tout prédicat unaire A on a $x = y \Rightarrow (A(x) \Leftrightarrow A(y))$. Ainsi une égalité entre termes $x = y$ permet de remplacer une ou toute occurence de x par y dans toute expression sans en affecter le résultat. Cela s'applique notamment lorsqu'un symbole est défini par un terme: les deux sont égaux, et interchangeables dans chaque expression. Aussi les axiomes et autres lois s'expriment à l'aide de symboles de variables remplaçables par des termes dans leur utilisation.

1.5. Classes en théorie des ensembles

On appelle *classe* tout prédicat unaire vu comme ensemble des objets où il est vrai. Les classes invariantes sont des cas très généraux de notions. Elles remplaceront les types en théorie des ensembles. En effet on a besoin de rassembler tous ses objets dans le type "élément" pouvant appartenir à des ensembles (pour éviter de rediviser à l'infini : ensembles d'éléments, d'ensembles, de fonctions, ensembles mixtes. . .). Dès lors les notions d'ensemble et de fonction seront des classes désignées par les symboles: Ens = "est un ensemble", Fon = "est une fonction".

(Une autre méthode serait de conserver 3 types où chaque ensemble figurerait en double, comme ensemble et comme élément, identifiés par un foncteur convertissant l'ensemble en élément; et de même pour les fonctions. Mais cette idée qui pourrait servir à d'autres théories ne suffira pas en théorie des ensembles qui aura de toute façon besoin des classes comme notions)

La théorie des ensembles dans le cycle fondateur

La théorie du modèle n'est que partiellement formalisable comme théorie: son exigence que chaque expression et chaque preuve soient de taille finie, n'est formulable que dans sa forme traduite en théorie des ensembles. Cette forme désignant les constituants de son modèle $M_1 = [T, M]$ par des variables libres, leur variabilité fait de ceci l'expression ensembliste de la théorie des modèles (grand tour des fondements des mathématiques).

Dans ce cadre, le composant M de M_1 constitue un modèle de la traduction ensembliste de T (les constituants ensemblistes de T se traduisent en termes désignant leur image dans le système-objet T).

Or en tant que théorie T nous allons formaliser une théorie des ensembles, interprétant ses concepts dans M. C'est pourquoi on marquera du préfixe méta- leur précédente interprétation dans l'univers extérieur (cadre des notions de théorie du modèle et même de leur méta-interprétation déjà évoquée).

La traduction des objets, notions et structures ensemblistes en leur équivalent méta-ensembliste, les préservera en grande partie, mais n'est pas réversible. Contrairement à la méthode standard traduisant tout objet en élément pur, les ensembles seront généralement traduits en méta-ensembles des mêmes éléments, et de même pour les fonctions. Ainsi tout ensemble E sera une classe (celle des x tels que $x \in E$, d'argument x et de paramètre E) mais on verra que l'univers, classe (vrai) de tous les objets, n'est pas un ensemble. Toute classe est un méta-ensemble d'objets, mais certains méta-ensembles d'objets, indéfinissables, ne sont pas des classes.

Classes de validité

Etant donnés un modèle et des valeurs des variables libres, une expression sera dite *valide* si elle a effectivement une valeur (une formule non valide n'est ni vraie ni fausse). La validité des expressions des théories génériques est garantie par la correction syntaxique, intégrée au concept d'expression. Mais en théorie des ensembles la validité d'une structure (expression) peut dépendre des valeurs de ses arguments (variables libres). La condition de validité est un prédicat, exprimé par une formule de mêmes variables libres, toujours valide. S'il est unaire, il définit une classe qui est le domaine du foncteur (ou prédicat unaire) considéré.

Généralement, le lieu de vérité d'un prédicat n-aire $\mathcal{R}$ partout valide est une *classe n-aire* (classe de systèmes de valeurs de n variables – on y reviendra avec les uplets), ou *multiclasse* pour ne pas préciser n. C'est le domaine d'un système de n variables uniquement soumises à l'hypothèse $\mathcal{R}$.

Toute structure (définie par une expression) a pour domaine une multiclasse appelée sa *multiclasse de validité*, définie par la formule de sa condition de validité, de mêmes arguments et paramètres. Celle de l'évaluateur de fonction $f(x)$, est (Fon f et $x \in \mathrm{Dom}\, f$). On doit prendre soin de n'employer des expressions que dans leur multiclasse de validité, ce qui se fera assez naturellement.

Une théorie aux structures partiellement valides se traduit en théorie générique à un seul type (aux structures partout valides), gardant intactes les expressions et leurs valeurs lorsqu'elles sont valides : les modèles se traduisent en ajoutant arbitrairement des valeurs aux structures hors de leur multiclasse de validité (par exemple une valeur constante), et en sens inverse en ignorant ces valeurs.

Validité étendue

Pour tous prédicats A et B de conditions de validité V_A et V_B, les formules "$A \wedge B$" et "$A \Rightarrow B$" auront la même condition de validité $(V_A \wedge (A \Rightarrow V_B))$ (rompant, pour "et", la symétrie entre A et B qu'il est inutile de rétablir). On les regardera donc valides même si A est faux et B non valide, alors de valeurs respectives faux et vrai, résultats indépendants d'une valeur arbitrairement ajoutée à B.

Ceci rend valides "$V_A \wedge A$" et "$V_A \Rightarrow A$" (étendant A respectivement par faux et par vrai hors de son domaine de validité), et les conditions de validité elles-mêmes. Les formules "$A \wedge (B \wedge C)$" et "$(A \wedge B) \wedge C$" ont la même condition de validité $(V_A \wedge (A \Rightarrow (V_B \wedge (B \Rightarrow V_C))))$.

Si $(A \wedge B)$ est toujours valide (A est toujours valide et B valide dans toute la (multi)classe A), la (multi)classe qu'il définit est appelée la *sous-classe de A définie par B*.

1.6. Variables liées en théorie des ensembles

La dernière sorte de symbole formant les expressions est celle des *symboles liants*, qui lient une (ou plusieurs) variable(s) (disons x), séparant l'intérieur (la sous-expression, utilisant x comme libre) de l'extérieur (où x est liée). Un tel symbole donne une valeur dépendant de la structure, d'argument x, définie par la sous-expression sur laquelle il s'applique. Cette valeur ne peut pas fidèlement décrire toute la structure (qui n'est pas un objet), mais en extrait une information.

Leur format diffère entre la théorie des ensembles et les théories génériques, qui gèrent les domaines différemment: contrairement aux théories génériques (où les domaines étant des types sont des données implicites des symboles liants), le domaine d'une variable liée en théorie des ensembles est un objet (ensemble), donné comme argument du symbole liant (lieu à remplir par un terme de valeur un ensemble), s'ajoutant aux données du symbole x à lier et de l'expression visée (seule à utiliser x).

Une expression est dite *close* si toutes ses variables sont liées.

Présentons les principaux symboles liants en théorie des ensembles.

Définitions de fonctions par des termes

Le *définisseur de fonction* ($\ni \mapsto$) lie une variable x de domaine E sur un terme t dépendant de x, suivant la syntaxe $(E \ni x \mapsto t(x))$ parfois abrégée en $(x \mapsto t(x))$ lorsque E est dicté par le contexte.

Valide si t est valide pour tout x dans E, il traduit en fonction de domaine E, le foncteur défini par t considéré sur E (de validité réduite à E). C'est en gros la traduction inverse de celle, de fonction en foncteur valide sur un ensemble, opérée par l'évaluateur de fonction.

D'autres notions seront définies comme classes d'objets avec des outils traduisant chaque objet en son rôle et inversement. Des objets déjà présents (ensembles ou fonctions) pourront jouer les nouveaux rôles, offrant leurs outils aux nouveaux objets. Les seules traductions nécessaires entre objets jouant un même rôle, relieront différentes représentations utiles d'un nouvel objet par des anciens.

Formalisation des opérations et curryfication

Les opérations n-aires jouant le rôle d'opérateurs n-aires entre n ensembles, se formalisent par:

• n foncteurs de domaines (peu utiles en pratique);

• un évaluateur $f(x_1, \cdots, x_n)$ d'arité $n+1$, d'arguments l'opération f et ses arguments $x_1, \cdots, x_n$;

• un définisseur, liant n variables sur un terme. Celui liant x et y de domaines E et F sur t se note $(E \ni x, F \ni y \mapsto t(x, y))$. On simplifiera $(E \ni x, E \ni y \mapsto t(x, y))$ en $(E \ni x, y \mapsto t(x, y))$.

Une représentation des opérations comme classe de fonctions, nommée *curryfication*, consiste à employer comme définisseur liant n variables la succession de n usages du définisseur de fonction (un pour chaque variable à lier), et donc de même comme évaluateur, n usages de l'évaluateur de fonction:

$$f = (E \ni x, F \ni y \mapsto t(x, y)) \simeq (E \ni x \mapsto (F \ni y \mapsto t(x, y))) = g$$
$$f(x, y) = g(x)(y) = t(x, y)$$

passant par la fonction $g(x) = (F \ni y \mapsto t(x, y))$ d'argument y, voyant x libre et y liée. Mais cela rompt la symétrie des rôles entre arguments en leur choisissant un ordre, et perd la donnée de F lorsque E est vide. Une formalisation sans ces défauts sera possible une fois introduits les uplets.

Relations et symbole de compréhension

Une *relation* est comme une opération mais à valeurs booléennes, jouant le rôle de prédicat dont la validité (les domaines des arguments) est réduite à des ensembles. Les relations n-aires se formalisent par un prédicat évaluateur d'arité $n+1$, et un définisseur liant n variables sur une formule. On pourrait les construire comme opérations en traduisant les booléens en objets. Mais voici l'autre méthode.

Pour tout prédicat unaire $\mathcal{R}$ valide dans un ensemble E, la sous-classe de E définie par $\mathcal{R}$ est un ensemble (car domaine d'une variable x parcourant E, donc liable, telle que $\mathcal{R}(x)$), noté $\{x \in E | \mathcal{R}(x)\}$ (ensemble des x dans E tels que $\mathcal{R}(x)$), qualifié de partie ou sous-ensemble de E: pour tout y,

$$y \in \{x \in E | \mathcal{R}(x)\} \Leftrightarrow (y \in E \wedge \mathcal{R}(y))$$

Le *symbole de compréhension* $\{\ \in\ |\ \}$, liant x à E sur $\mathcal{R}$, servira de définisseur de relations unaires sur E figurées comme parties F de E, évaluées par $\in$ comme prédicats $(x \in F)$ d'argument x. Mais ces prédicats sont valides sur tout l'univers, valant faux hors de E dont la donnée est perdue. Cette absence d'opérateur Dom n'importe guère, le domaine E étant généralement dicté par le contexte.

Les symboles de définisseur et de compréhension enregistrant toute la structure définie par l'expression sur l'ensemble donnés, suffisent à définir tout autre symbole liant comme structure exercée dessus. Les relations n-aires sont définissables par 1 compréhension et $n-1$ usages du définisseur de fonction.

Plus généralement, pour toute sorte de méta-objets indirectement utilisables dans les expressions comme des objets (une classe comme un ensemble. . .), la théorie des ensembles s'enrichira d'outils les concrétisant et désignant directement comme objets.

1.7. Quantificateurs

On appelle *quantificateur* tout symbole liant exercé sur une formule et à valeurs booléennes.

Un quantificateur Q de domaine un ensemble E sur une formule $\mathcal{R}$ s'écrira $(Qx \in E, \mathcal{R}(x))$. Avec un domaine sous-entendu (fixé), on l'écrira $Qx, \mathcal{R}(x)$.

Les deux principaux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ (par lesquels on en définira ensuite d'autres) sont:

— Le *quantificateur existentiel* $\exists$, qui se lit "Il existe x (dans. . .) tel que. . . "

— Le *quantificateur universel* $\forall$, qui se lit "Pour tout (ou: quel que soit) x (dans. . .),. . . ").

Notant $(x \mapsto \mathcal{R}(x))$ la méta-fonction de même domaine définie par $\mathcal{R}$, on méta-définit $\forall$ et $\exists$ par

$$(\forall x, \mathcal{R}(x)) \;\Leftrightarrow\; (x \mapsto \mathcal{R}(x)) = (x \mapsto 1) \;\not\Leftrightarrow\; (\exists x, \neg\mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow\; (x \mapsto \neg\mathcal{R}(x)) \neq (x \mapsto 0)$$

En théorie des ensembles, $(\forall x \in E, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow \{x \in E | \mathcal{R}(x)\} = E$.

La formule $(\forall x, 1)$ est toujours vraie.

En théorie générique on mettra le domaine en indice: $Q_i x, \mathcal{R}(x)$ où i est le type de x; avec des classes,

$$(\exists_{\mathcal{C}} x, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow (\exists x, \mathcal{C}(x) \wedge \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow \exists_{\mathcal{C} \wedge \mathcal{R}}, 1$$
$$(\forall_{\mathcal{C}} x, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \mathcal{C}(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x))$$
$$\forall x, (\mathcal{C}(x) \Leftrightarrow (\exists_{\mathcal{C}}\, y, x = y))$$

Inclusion entre classes

La classe $\mathcal{A}$ est dite incluse dans la classe $\mathcal{B}$ si $\forall_{\mathcal{A}} x, \mathcal{B}(x)$. Alors $\mathcal{A}$ est une sous-classe de $\mathcal{B}$ car $\forall x, (\mathcal{A}(x) \Leftrightarrow (\mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{A}(x))$. Réciproquement, toute sous-classe $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$ de $\mathcal{B}$ est incluse dans $\mathcal{B}$. L'inclusion de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ entraîne pour tout prédicat $\mathcal{C}$ (en cas de validité):

$$\begin{gathered}
(\forall_{\mathcal{B}} x, \mathcal{C}(x)) \Rightarrow (\forall_{\mathcal{A}} x, \mathcal{C}(x)) \\
(\exists_{\mathcal{A}} x, \mathcal{C}(x)) \Rightarrow (\exists_{\mathcal{B}} x, \mathcal{C}(x)) \\
(\exists_{\mathcal{C}} x, \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (\exists_{\mathcal{C}} x, \mathcal{B}(x)) \\
(\forall_{\mathcal{C}} x, \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (\forall_{\mathcal{C}} x, \mathcal{B}(x))
\end{gathered}$$

Règles de preuves des quantificateurs sur un prédicat unaire $\mathcal{R}$

Règle d'introduction de $\exists$. *Si on trouve un terme t et une preuve de $\mathcal{R}(t)$, alors $\exists x, \mathcal{R}(x)$.*

Règle d'élimination de $\exists$. *Si $\exists x, \mathcal{R}(x)$, alors on peut introduire une nouvelle variable libre z avec l'hypothèse $\mathcal{R}(z)$ (les conséquences seront justes, sans restreindre la généralité).*

Ces règles traduisent le sens de $\exists$: le passage de t à $\exists$ puis de $\exists$ à z, revient à abréger t par z. Elles donnent le même sens à $\exists_{\mathcal{C}}$ qu'à ses 2 formules équivalentes, court-circuitant la règle de validité étendue de $(\mathcal{C} \wedge \mathcal{R})$ car n'invoquant que le cas où $\mathcal{C}(x)$ est vrai et donc $\mathcal{R}(x)$ est valide.

Alors que $\exists$ s'exprimait comme désignation d'objet, $\forall$ se présente comme règle de déduction.

Règle d'introduction de $\forall$. *Si de la seule hypothèse $\mathcal{C}(x)$ sur une nouvelle variable libre x on a pu déduire $\mathcal{R}(x)$, alors $\forall_{\mathcal{C}} x, \mathcal{R}(x)$.*

Règle d'élimination de $\forall$. *Si $(\forall_{\mathcal{C}} x, \mathcal{R}(x))$ et on a un terme t satisfaisant $\mathcal{C}(t)$, alors $\mathcal{R}(t)$.*

L'usage successif de ces règles revient à réécrire la démonstration initiale en remplaçant x par t.

Statut des quantificateurs ouverts en théorie des ensembles

La théorie des ensembles se traduit en théorie générique en convertissant en classes les domaines des quantificateurs:

$$\begin{gathered}
(\exists x \in E, \mathcal{R}(x)) \to (\exists x, x \in E \wedge \mathcal{R}(x)) \\
(\forall x \in E, \mathcal{R}(x)) \to (\forall x, x \in E \Rightarrow \mathcal{R}(x))
\end{gathered}$$

La théorie des ensembles n'admet dans ses formules, dites *formules ensemblistes* (qui définissent les prédicats et multiclasses, et composent certains termes), que des quantificateurs sur des ensembles, dits *quantificateurs bornés*. Mais sa forme traduite en théorie générique autorise des quantificateurs sur des classes (ou sur l'univers), dits *quantificateurs ouverts*, plus généraux. Les formules avec quantificateurs ouverts seront appelées des *énoncés*. En théorie des ensembles, on réservera l'usage des énoncés clos et valides à la déclaration de leur véracité: ce seront d'abord les axiomes, puis les théorèmes (déduits des axiomes), nommés différemment suivant leur importance: un théorème est plus important qu'une proposition; un lemme sert à démontrer un théorème; un corollaire s'en déduit.

Sauf exception de commodité, les quantificateurs ouverts seront exprimés verbalement plutôt que symboliquement dans les énoncés, encadrant des formules ensemblistes seules notées en symboles. Les règles de preuves des quantificateurs traduiront les énoncés en manipulations de formules.

Le symbole de compréhension fut défini par un énoncé. On va l'utiliser pour montrer que la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble, rendant nécessaires toutes ces distinctions entre classes et ensembles, et entre quantificateurs ouverts et quantificateurs bornés:

Proposition (paradoxe de Russell). *Pour tout ensemble E il existe un ensemble F tel que $F \notin E$.*

Preuve. $F = \{x \in E | \operatorname{Ens}(x) \wedge x \notin x\} \Rightarrow (F \in F \Leftrightarrow (F \in E \wedge F \notin F)) \Leftrightarrow (F \notin F \wedge F \notin E)$. □

1.8. Premiers axiomes de théorie des ensembles

Le prédicat d'inclusion $\subset$ entre deux ensembles E et F, se définit par $E \subset F \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in F)$. Il se lit: E est inclus dans F, ou E est une partie ou un sous-ensemble de F, ou F englobe E.

On a toujours $E \subset E$. Les chaînes d'implications se traduisent en chaînes d'inclusions:

$$(E \subset F \subset G) \Leftrightarrow (E \subset F \wedge F \subset G) \Rightarrow E \subset G.$$

Premiers axiomes:

$$\forall x, \quad \neg(\operatorname{Ens}(x) \wedge \operatorname{Fon}(x))$$

$\forall_{\mathrm{Fon}} x, \quad \mathrm{Ens}(\mathrm{Dom}\, x)$

Pour tout terme t, $\forall E, \forall$(paramètres), $\mathrm{Fon}(E \ni x \mapsto t(x))$

$\forall_{\mathrm{Ens}} E, F, \quad E \subset F \subset E \;\Rightarrow E = F$ (axiome d'extensionnalité).

Ce dernier axiome redéfinit l'égalité entre ensembles par leur équivalence comme classes (laissant les éléments en vrac): $E \subset F \subset E$ signifie que E et F ont les mêmes éléments ($\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F$) et implique pour tout prédicat $\mathcal{R}$ que $(\forall x \in F, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathcal{R}(x))$, et de même pour $\exists$.

Traduction du définisseur

Le définisseur de fonction se traduit en théorie générique par une infinité de symboles: pour chaque terme t à un argument (et des paramètres), l'expression $(E \ni x \mapsto t)$ se traduit en bloc par un symbole d'opérateur différent, d'arguments E et les paramètres de t. (Ceux où toute sous-expression de t sans occurrence de x est l'unique occurence d'un paramètre, suffisent à définir les autres.)

Les axiomes suivants peuvent se lire comme axiomes de la théorie générique traduisant la théorie des ensembles; ceux dépendant d'un terme t sont des schémas d'axiomes (schéma d'énoncés = infinité d'énoncés obtenus par remplacement d'un symbole de structure annexe par des expressions):

Axiomes des fonctions. *Pour tout terme t à un argument, toutes valeurs de ses paramètres, tout ensemble E où t est valide, et toutes fonctions f et g, le premier de ces axiomes résume les 3 suivants:*

$$f = (E \ni x \mapsto t(x)) \Leftrightarrow (\mathrm{Dom}\, f = E \wedge (\forall x \in E, f(x) = t(x)))$$
$$\mathrm{Dom}(E \ni x \mapsto t(x)) = E$$
$$\forall x \in E, (E \ni y \mapsto t(y))(x) = t(x)$$
$$(\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g \wedge \forall x \in \mathrm{Dom}\, f, f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g$$

1.9. Principe de génération des ensembles

Les quantificateurs bornés donnent aux ensembles leur rôle fondamental de domaines des variables liées, rôle inconnu du prédicat $\in$ qui ne les voit que comme classes. Techniquement, $\in$ est définissable par $x \in E \Leftrightarrow (\exists y \in E, x = y)$ mais ne suffit pas à définir en retour les quantificateurs bornés par des formules ensemblistes. Philosophiquement, la perception d'un ensemble comme classe (le fait de savoir classer chaque objet comme lui appartenant ou non) ne suffit pas à le percevoir effectivement comme ensemble (à fournir la perspective sur tous ses éléments comme coexistants).

Principe. *Pour toute classe $\mathcal{C}$ définie par une formule, si l'énoncé $(\forall x, \mathcal{C}(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x))$ du quantificateur $\forall_{\mathcal{C}}$ sur tout prédicat unaire $\mathcal{R}$, est démontré équivalent à une formule ensembliste $(Qx, \mathcal{R}(x))$ utilisant $\mathcal{R}$ comme symbole annexe non défini, alors $\mathcal{C}$ est un ensemble désignable par un nouveau symbole d'opérateur K, d'arguments les paramètres communs de $\mathcal{C}$ et Q, ajoutable à la théorie des ensembles avec les axiomes: (pour toutes valeurs admises des paramètres,) $(\forall x \in K, \mathcal{C}(x))$ et $(Qx, x \in K)$.*

L'équivalence de Q et $\forall_{\mathcal{C}}$ sur tout $\mathcal{R}$, revient au système suivant où $(\overline{Q}x, \mathcal{R}(x)) \not\Leftrightarrow (Qx, \neg\mathcal{R}(x))$:

(i) $\forall x, (\mathcal{C}(x) \Leftrightarrow \overline{Q}y, x = y)$ (il suffit en fait que $\forall x, \mathcal{C}(x) \Rightarrow \overline{Q}y, x = y$)

(ii) $Qx, \mathcal{C}(x)$

(iii) Pour tous prédicats unaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tels que $\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ on a $(Qx, \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (Qx, \mathcal{B}(x))$.

En effet nous savons déjà que ces 3 propriétés résultent de "$Q = \forall_{\mathcal{C}}$". Réciproquement,

((ii) et (iii) et $(\forall_{\mathcal{C}} x, \mathcal{R}(x)) \Rightarrow Qx, \mathcal{R}(x))$

((i) et $\exists_{\mathcal{C}} x, \mathcal{R}(x)) \Rightarrow \exists x, ((\overline{Q}y, x = y) \wedge (\forall y, x = y \Rightarrow \mathcal{R}(y))) \Rightarrow ((\text{iii}) \Rightarrow \overline{Q}x, \mathcal{R}(x))$. □

(iii) sera souvent immédiat faute d'occurence gênante de $\mathcal{R}$ dans Q (négation, équivalence, gauche d'un $\Rightarrow$), laissant à vérifier (i) et (ii). Contre-exemple: $\overline{Q} = \mathcal{C} = 1$, $Q = 0$ ne satisfait pas (ii).

Ainsi s'obtiennent les opérateurs suivants (notant $D = \mathrm{Dom}\, f$):

K	$\{y \in E \mid \mathcal{B}(y)\}$	$\bigcup E$	$\mathrm{Im}\, f$	$\emptyset$	$\{y\}$	$\{y, z\}$
V_K	$\forall x \in E, V_{\mathcal{B}}(x)$	$\mathrm{Ens}(E) \wedge \forall x \in E, \mathrm{Ens}(x)$	$\mathrm{Fon}(f)$			
$\mathcal{C}(x)$	$x \in E \wedge \mathcal{B}(x)$	$\exists y \in E, x \in y$	$\exists y \in D, f(y) = x$	0	$x = y$	$x = y \vee x = z$
$Qx, \mathcal{R}(x)$	$\forall x \in E, \mathcal{B}(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x)$	$\forall y \in E, \forall x \in y, \mathcal{R}(x)$	$\forall x \in D, \mathcal{R}(f(x))$	1	$\mathcal{R}(y)$	$\mathcal{R}(y) \wedge \mathcal{R}(z)$
$\overline{Q}x, \mathcal{R}(x)$	$\exists x \in E, \mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{R}(x)$	$\exists y \in E, \exists x \in y, \mathcal{R}(x)$	$\exists x \in D, \mathcal{R}(f(x))$	0	$\mathcal{R}(y)$	$\mathcal{R}(y) \vee \mathcal{R}(z)$

La définition de $K = \{x \in E \mid \mathcal{B}(x)\}$, qui ne fut initialement exprimée que comme classe, se réécrit $(\forall x \in K, x \in E \wedge \mathcal{B}(x))$ et $(\forall x \in E, \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in K)$, ou encore $(K \subset E \wedge \forall x \in E, x \in K \Leftrightarrow \mathcal{B}(x))$.

Le foncteur $\bigcup$ est le symbole d'union, et ses axiomes constituent l'*axiome de la réunion*.

Pour toute fonction f, l'ensemble $\operatorname{Im} f$, appelé *ensemble image* de f, est l'ensemble des valeurs de $f(x)$ (domaine de la variable $f(x)$) lorsque x parcourt E. Pour tous ensembles E et F, une *fonction de E dans F* est une fonction f telle que ($\operatorname{Dom} f = E$) et ($\operatorname{Im} f \subset F$). On dit que F est un *ensemble d'arrivée de f* pour signifier cette dernière condition (qui s'écrit $\forall x \in \operatorname{Dom} f, f(x) \in F$).

L'*ensemble vide* $\emptyset$ est le seul ensemble sans élément. Pour tout ensemble E, on a ($\emptyset \subset E$), donc ($E = \emptyset \Leftrightarrow E \subset \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in E, 0$) et donc ($E \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in E, 1$). Ce premier symbole de constante garantit l'existence d'un ensemble; réciproquement, il se réobtient par $\emptyset = \{x \in E | 0\}$.

On pourrait redéfinir $\exists$ par $(\exists x \in E, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow \{x \in E|\mathcal{R}(x)\} \neq \emptyset \Leftrightarrow (1 \in \operatorname{Im}(E \ni x \mapsto \mathcal{R}(x)))$.

On a ($\operatorname{Dom} f = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \emptyset$). On appelle *fonction vide* l'unique fonction de domaine $\emptyset$.

Pour tout x, l'ensemble $\{x, x\} = \{x\}$, ayant pour seul élément x, est appelé un *singleton*.

L'ensemble $\{x, y\} = \{y, x\}$ est une *paire* (ensemble à deux éléments) lorsque $x \neq y$.

Notre théorie des ensembles s'enrichira ultérieurement d'autres symboles et axiomes, nécessaires (comme ici) ou optionnels (ouvrant à une diversité de théories envisageables).

Compléments métamathématiques

1.A. Théorèmes de complétude et d'incomplétude

Résumons ces deux fameux théorèmes de Gödel qui éclairent les fondements des mathématiques.

Dans une théorie T, une *preuve* d'une formule A est un système fini, modèle d'une "théorie des démonstrations", reliant A à des axiomes de T et garantissant que A est vrai dans tout modèle de T. On dit que A est *démontrable* et on note $T \vdash A$, s'il en existe une preuve; *réfutable*, si $T \vdash \neg A$; *indécidable*, si elle n'est ni démontrable ni réfutable. Une théorie est dite *contradictoire* s'il existe une formule démontrable et réfutable, et alors toutes le sont ($T \vdash 0$). Sinon elle est dite *consistante*.

Le théorème de complétude fait la force de la théorie des modèles, établissant l'équivalence entre réalisme et formalisme pour les théories génériques. Etabli pour un formalisme particulier, il rend la notion de démontrabilité parfaite et indépendante du choix du formalisme de même qualité:

Théorème de complétude. *Toute théorie générique consistante a un modèle.*

Preuve. Traduisons chaque axiome en suite de quantificateurs suivie d'une formule sans quantificateur. Remplaçons-y chaque $\exists$ par un nouveau symbole d'opérateur K suivant la règle $(\forall x, \exists y, \forall z, A(x, y, z)) \to (\forall x, \forall z, A(x, K(x), z))$. Ajoutons une par une aux axiomes chaque formule close (symbole de prédicat appliqué à des termes) non réfutable par les axiomes précédents. Chacune prenant une valeur booléenne sans contradiction, l'ensemble des termes clos forme un modèle. □

Toute formule A irréfutable dans T est vraie dans un certain modèle de T (un modèle de la théorie consistante $T + A$). Donc $(T \vdash A) \Leftrightarrow$ (A vraie dans tous les modèles de T).

Les modèles ainsi construits dépendant d'un choix arbitraire d'ordre entre formules, une infinité de variantes est possible. Mais aucune théorie fondatrice ne peut spécifier ses propres vérités (valeurs idéales de toutes ses formules closes), suivant le théorème d'indéfinissabilité de la vérité de Tarski:

Théorème. *Soit une théorie T qui dans tout modèle M définit les données invariantes de:*
– "une théorie" T' où toute expression F de T se traduit en $[F]$ dans T' de manière méta-invariante,
– un prédicat unaire v applicable à l'image $[F]$ de toute formule close F de T,
Alors il existe une formule close valide G de T, telle que $T \vdash (G \not\Leftrightarrow v[G])$.

Preuve. Supposons l'image $[F]$ de toute formule F de T, désignée par un terme clos t_F de T, construit suivant une prodédure formalisable par un terme unaire J de T: $J([F]) = [t_F]$. Dans T', une formule A de variable remplacée par un terme clos u forme une formule close $(A : u)$: $([F] : [K]) = [F(K)]$.

Soit $H(A)$ la formule $\neg v(A : J(A))$, de variable A dans la classe des formules de T' à une variable libre. On définit G par $H(t_H)$. Alors $[G] = ([H] : J([H]))$, d'où la conclusion. □

Corollaire. *Si M est explicitement construit (méta-invariant) déterminant les valeurs des formules closes F de T, alors leur calcul $v[F]$ dans M par les mêmes règles, s'il est possible, est erroné.*

Preuve. G et $v[G]$ sont calculés par les mêmes règles mais interprétées de l'extérieur et de l'intérieur de M. Comme $G \not\Leftrightarrow v[G]$, si le calcul extérieur est correct alors celui dans M (donc au moins un concept utilisé, à savoir la démontrabilité pour le théorème de complétude) ne l'est pas. □

Théorème d'incomplétude. *Si T' est construit comme T et si T peut exprimer la démontrabilité p dans T', alors:* $(T \vdash F) \Rightarrow (T \vdash p[F])$, *et* $(T \vdash \neg p[0]) \Leftrightarrow (T \vdash 0)$.

La preuve de A est recopiable dans T', ou convertible en preuve de l'existence d'une preuve.

Soit $T \vdash (G \not\Leftrightarrow p[G])$. Alors $(T \vdash G) \Leftrightarrow (T \vdash (G \wedge p[G])) \Leftrightarrow (T \vdash 0)$. Donc $T \vdash (p[G] \Leftrightarrow p[0])$. Donc $(T \vdash \neg p[0]) \Leftrightarrow (T \vdash G) \Leftrightarrow (T \vdash 0)$. □

Point de vue contraposé si T peut exprimer les modèles: tout modèle de T' est un modèle de T.

Pas de réciproque: une preuve dans T', modèle de la théorie des démonstrations "fini" d'après T, peut s'avérer infini et donc n'être pas une preuve. Si une formule F n'a que des "preuves" infinies, sa démontrabilité est indécidable et fausse: les preuves introuvables de F semblent n'avoir pas été assez cherchées, et les modèles où F est fausse ne pouvant être explicités "n'existent pas partout". Partout où des modèles de T peuvent se trouver, certains d'eux n'en peuvent plus trouver aucun.

1.B. Le temps métamathématique et le paradoxe de Zénon

La manière dont le monde mathématique peut se penser lui-même, ressemble à la nôtre.

Parler du monde et du langage qui en parle, c'est parler de tout, et d'autre chose qui y échappe. Parler de "ce dont je parle" n'informerait pas sur ce dont il s'agit, pouvant être n'importe quoi, et devenant absurde dans une phrase qui modifie ou contredit ce sens ("le contraire de ce que je dis").

Invoquer "ce dont je parlerai demain", même en sachant ce que je dirai, n'en donnerait pas non plus le sens: non seulement si je vais parler de "ce dont j'ai parlé hier" (donc maintenant) cela ferait un cercle vicieux; mais même si la forme de mon futur propos assurait que son sens existera demain, cela ne le donnerait pas encore aujourd'hui. J'aurais beau spéculer dessus, son sens effectif ne surgira qu'une fois réellement exprimé dans son contexte. Faute d'intérêt à parler de propos sans leur signification, mieux vaut ignorer les propos présents et futurs, et n'étudier que les propos passés.

Tel un historien, je ne peux discuter que l'univers du passé, étant moi-même en un présent extérieur à cet univers. Je peux parler de "ce que dont j'ai parlé à tel moment", ce qui a bien un sens si ce propos passé en avait un, car j'en avais saisi le sens et je m'en souviens. L'univers du passé dont je peux parler aujourd'hui inclut celui dont je pouvais parler hier, mais aussi mes propos d'hier à son sujet et leur signification. Je peux donc parler aujourd'hui de choses extérieures à l'univers dont je pouvais parler hier. Or, depuis hier, je n'ai pas appris à parler le martien ni n'ai acquis une nouvelle intelligence transcendantale; mais le même langage s'applique à un univers enrichi de nouveaux objets. Ces nouveaux objets ressemblant aux précédents, mon univers d'aujourd'hui peut ressembler à mon univers d'hier; mais d'un univers à l'autre, un même énoncé peut prendre un sens différent.

Achille poursuit une tortue ; à chaque fois qu'il parcourt la distance qui l'en sépare, celle-ci prend une nouvelle longueur d'avance. Peut-il l'atteindre ? Vu d'une hauteur, un véhicule parti sur une route horizontale se rapproche sans cesse de l'horizon. Peut-il l'atteindre ? Les particules sont envoyées dans les accélérateurs de plus en plus près de la vitesse de la lumière. Peuvent-elles l'atteindre ?

Chaque exemple a deux lectures: l'une, "fermée", voit une extrémité atteignable; l'autre, "ouverte", l'exclut pour ne voir que le mouvement qui s'en approche indéfiniment. Finalement, une mesure physique dicte à chaque cas sa seule "vraie" lecture (et pas la même). Mais le monde des mathématiques, où les objets n'ont que des rôles conventionnels, peut accepter les 2 interprétations.

Chaque théorie générique est "fermée", voyant son univers (domaine de ses variables) comme un ensemble, et pouvant démontrer toute conséquence de ses axiomes. Mais elle-même (ou toute théorie capable de la fonder) échappe à cette totalité. D'où le besoin d'une théorie ouverte intégrant chaque étude (théorie) d'un univers passé, comme objet d'un univers ultérieur, formant une succession illimitée de réalités croissantes. Ce rôle de théorie ouverte sera joué par la théorie des ensembles.

1.C. Sens relatif des quantificateurs ouverts

En guise de privation d'extrémité, la théorie des ensembles exclut les quantificateurs ouverts de ses formules : une fois fixées les variables libres et le contenu des ensembles utilisés, les expressions ensemblistes (reflétant des questions locales, explicitement subjectives) prennent leur valeur indépendamment du reste de l'univers (qui peut continuer de croître, seulement contraint par les axiomes choisis).

En n'accordant pas de signification globale à certains énoncés, elle reconnait leur caractère relatif, contingent, seulement valable "ici et maintenant" (dans un des univers acceptés). Un énoncé universel $(\forall x, \ldots)$ vrai "ici", pourrait devenir faux (un contre-exemple pourrait surgir) "ailleurs". Mais cette dépendance ne saurait être affirmée: la question de ce qu'il en est "ailleurs" dépendrait du domaine de variation de l'univers, et se réduirait à décrire leur union : $(\forall x, \ldots)$ est vrai "dans tous les univers" s'il l'est dans l'univers formé de leur union. L'indétermination doit donc n'être traitée que par évitement, comme aussi inconnue que le panorama d'univers possibles auquel elle réfère.

Seulement certains énoncés seront invoqués pour affirmer leur véracité sur les univers étudiés, par choix (axiomes, sélectionnant les univers acceptés) ou par déduction (théorèmes): $\exists x, P(x)$ signifie que chacun des univers acceptés contient un x tel que $P(x)$, et de même pour $\forall$.

Suivant le théorème de complétude, l'indétermination de valeur des énoncés, liée à la multiplicité des univers possibles, reflète exactement les limites de la prouvabilité formelle. La prouvabilité d'un énoncé, équivaut au fait que "sa négation entraine une contradiction", où la négation échange les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ également s'ils sont ouverts; et chacun d'eux se traduit formellement suivant les règles de preuves des quantificateurs. Dans une théorie consistante on a 3 cas: soit seul $\exists x, P(x)$ est prouvable, soit seule sa négation $\forall x, \neg P(x)$ est prouvable, soit ni l'un ni l'autre (indécidable). En effet, des règles de preuves on tire que (dans toute classe) pour tous prédicats unaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $((\exists x, \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x, \mathcal{B}(x))) \Rightarrow \exists x, \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)$, ce qui interdit $(\exists x, \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x, \neg \mathcal{A}(x))$.

Une preuve de $\forall x, \neg P(x)$ est une preuve de $\neg P(x)$ (où la variable libre x fut introduite sans hypothèse) et revient à ce que l'hypothèse $P(x)$ (donc, existentielle) entraine une contradiction.

Une preuve de $\exists x, P(x)$ est faite d'un terme t et d'une preuve de $P(t)$ (ou de termes $t, t', t'' \ldots$ et d'une preuve de $(P(t) \vee P(t') \vee P(t'') \ldots)$).

L'indécidabilité de $\exists x, P(x)$ peut venir d'univers $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ où l'énoncé est vrai seulement dans $\mathcal{U}'$, les objets x satisfaisant $P(x)$ étant tous hors de $\mathcal{U}$. Intuitivement, ces objets sont hors d'atteinte par des moyens déterminés (termes) ou non (usage d'autres axiomes d'existence de la théorie).

Mais il y a d'autres possibilités: certains univers où il est faux peuvent n'être pas extensibles en univers où il est vrai (satisfaisant encore les autres axiomes), et un univers où il est vrai ne contient pas nécessairement une classe d'objets x satisfaisant tous $\neg P(x)$, qui satisfasse tous les axiomes et préserve la valeur fausse des $P(x)$. (On ne peut pas toujours simplement éliminer des objets gênants en les effaçant, car il risquent de ressurgir d'une manière ou d'une autre). Ainsi, les différents univers possibles aux différentes propriétés ne se succèdent pas nécessairement dans le temps, mais peuvent correspondre à des dynamiques séparées et incompatibles.

En tout cas, l'indécidabilité de $\exists x, P(x)$ ne permet pas *dans cette théorie* d'introduire un objet (nouveau symbole de constante) x avec l'axiome $P(x)$, mais signifie que cet ajout donne une nouvelle théorie encore non-contradictoire. Puis la procédure de complétion de la théorie aboutira à un univers contenant un x satisfaisant $P(x)$ (aux propriétés souvent arbitraires suivant celles de x).

1.D. Nature des classes et principe de génération des ensembles

Tentons de définir l'égalité entre classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'après leurs éléments: $\forall x, \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \mathcal{B}(x)$. En particulier, tout énoncé universel $(\forall x, \mathcal{A}(x))$ exprimerait l'égalité de $\mathcal{A}$ à l'univers. Cette notion d'égalité entre classes serait donc sujette à la même indétermination de sens que le $\forall$ ouvert, et sera donc pareillement remplacée par sa démontrabilité: des classes ne seront déclarées égales que lorsque l'équivalence des formules a été démontrée. Les classes ne ressemblent donc vraiment pas à des objets.

Dans chaque univers possible $\mathcal{U}$, une classe $\mathcal{C}$ s'interprète comme partie de $\mathcal{U}$ (méta-ensemble d'objets) par compréhension, $P = \{x \in \mathcal{U} | \mathcal{C}(x)\}$; on dit que $\mathcal{C}$ est un ensemble lorsque ce P a les mêmes éléments qu'un objet "ensemble" dans $\mathcal{U}$. Sinon, le méta-ensemble P, qui n'existait pas encore comme ensemble dans $\mathcal{U}$, est en train de naître à l'existence, et existera désormais comme ensemble appartenant aux univers suivants. Mais il n'en va généralement pas de même pour $\mathcal{C}$.

En effet comme P dépend de $\mathcal{U}$, il peut s'enrichir lorsque $\mathcal{U}$ grandit, de tout nouvel objet x satisfaisant $\mathcal{C}(x)$. Seulement s'il n'apparaît pas ou plus de tels objets, laissant P définitivement constante, la classe $\mathcal{C}$ demeure identifiable au même P, et donc acquiert ou préserve le statut d'ensemble égal à P. Dans le cas contraire où $\mathcal{C}$ vient à différer du premier P, elle perd alors son éventuel statut initial d'ensemble égal à P, même si elle pourra encore s'identifier à un autre ensemble ultérieurement, à tort ou à raison.

Ainsi considérant un univers variable, la qualité d'ensemble de $\mathcal{C}$ se définit par la constance de P; tandis que l'originalité de la notion de classe au-delà des ensembles, réside dans la possible variabilité de P lors de la croissance de $\mathcal{U}$, par apparition de nouveaux éléments satisfaisant $\mathcal{C}$ hors de l'univers d'un instant donné; ceci obligeant à relativiser l'identification de $\mathcal{C}$ à P dans un univers donné, comme subjective et possiblement illusoire. Ainsi, pour une classe, la qualité d'ensemble signifie l'affirmation (ou garantie) que tout objet non encore considéré (n'existant pas encore dans l'univers d'un instant donné) en sera toujours exclu quand il surviendra; tandis que les autres classes restent capables de contenir des éléments qui n'existent pas encore mais pourront satisfaire la propriété.

Mais si à la variation de $\mathcal{U}$ on donne finalement un domaine fixé, l'effet de cette variation pour son rôle d'interprétation des variables, des quantificateurs ouverts, et de la distinction des ensembles parmi les classes, se résume au point de vue de l'univers fixe $\mathcal{U}'$ union des valeurs de $\mathcal{U}$. En effet, l'interprétation dans $\mathcal{U}'$ de l'énoncé qualifiant une classe $\mathcal{C}$ comme ensemble ($\exists E, \forall x, \mathcal{C}(x) \Leftrightarrow x \in E$), équivaut à dire que lors de la succession des $\mathcal{U}$, "il existe un temps après lequel P est constant". Avec donc pour avantage, de ne pas se fier au premier univers venu.

Dès lors, la méta-variable $\mathcal{U}$ (et donc aussi P pour toute classe donnée) doit être comprise comme ayant pour domaine idéal non un ensemble mais une classe (en un sens à préciser)...

Justification du principe de génération des ensembles

Soit $\overline{Q}$ une formule de quantificateur telle que $\neg(\overline{Q}y, 0)$, et soit $\mathcal{C}$ la classe des x tels que $\overline{Q}y, y = x$. Pour tout x dans $\mathcal{C}$ on a $(\overline{Q}y, y = x)$ mais $\neg(\overline{Q}y, 0)$. Or $\overline{Q}$ ne dispose que de moyens fixés indépendants de x pour distinguer le prédicat $y \mapsto (y = x)$ de $y \mapsto 0$: une formule finie, des variables liées à des ensembles, des paramètres fixés, fournissant les valeurs de y où tester le prédicat. Ces deux prédicats ne sont plus distinguables ainsi dès que x est un extraterrestre (non testé par $\overline{Q}$). Donc x est un Terrien. Tous ses éléments étant Terriens, $\mathcal{C}$ est un ensemble. □

1.E. Exemples concrets

Un ensemble: Reste-t-il un dodo à la Réunion ? Cette île étant bien connue et régulièrement visitée depuis leur disparition supposée, des dodos survivants n'auraient pas pu passer inaperçus, où qu'ils puissent se cacher. N'en ayant pas trouvé, on peut conclure qu'il n'y en a plus. La question étant exprimée par un quantificateur borné, a un sens pratique et une réponse observable.

Un ensemble ressemblant à une classe: Bertrand Russell a ainsi critiqué la théologie : "Si je suggérais qu'entre la Terre et Mars se trouve une théière de porcelaine en orbite elliptique autour du Soleil, personne ne serait capable de prouver le contraire pour peu que j'aie pris la précaution de préciser que la théière est trop petite pour être détectée par nos plus puissants télescopes. Mais si j'affirmais que, comme ma proposition ne peut être réfutée, il n'est pas tolérable pour la raison humaine d'en douter, on me considérerait aussitôt comme un illuminé." Cette question est clairement définie mais portant sur un ensemble trop grand, sa réponse est pratiquement inaccessible.

Une classe: l'énoncé perd toute signification une fois étendu à tout l'univers: existe-t-il dans l'univers une théière orbitant une quelconque étoile ? Non seulement on ignore la taille de l'univers (voire, s'il est fini ou infini), mais d'après la théorie de la relativité, ses parties d'espace-temps éloignées dont nous n'avons pas encore reçu la lumière n'existent pas encore (leurs évènements n'ont pas encore réellement eu lieu) par rapport à nous.

Un méta-objet: bien des débats ont prétendu porter sur l'"existence de Dieu". Mais l'existence ne qualifiant normalement que des objets, n'est-ce pas une grande confusion que de l'associer à un méta-objet ? Les apologètes concevaient-ils correctement leur propre thèse au-delà de ces mots ? Mais quels sont donc les *objets* de leur foi et de leur adoration ? Chaque monothéisme accuse justement chaque autre d'adorer des objets au lieu de Dieu (péché d'idolatrie): des livres, histoires, idées, croyances, enseignements, erreurs, attitudes, sentiments, lieux, évènements, accidents, souffrances, maladies, catastrophes naturelles (déclarées volonté de Dieu), souvent guère plus subtils que les antiques statues (qui étaient riches de leurs propres histoires et enseignements), et sans jamais en vérifier sérieusement (de peur de froisser Dieu) les qualités qui justifieraient leur supposée divinité.

Un évènement universel: le sacrifice rédempteur du Fils de Dieu. Il reste à préciser s'il y aurait eu la moindre différence (et laquelle) à ce qu'il eut lieu non sur Terre mais dans une autre galaxie, ou dans les plans de Dieu pour la Terre de l'an 3000 suivant nos imparfaites conventions.

Autre ensemble réduit à une classe... la classe F des filles n'est actuellement qu'incomplètement représentée par des ensembles: l'ensemble de celles présentes tel jour en tel lieu, celles utilisant tel site de rencontre et dont les paramètres satisfont tels ou tels critères, etc. Soient dedans les prédicats B de beauté à mon goût et C de convenance d'une relation avec moi. Quand j'essaie d'expliquer que

$$(\forall x \text{ dans } F, C(x) \Rightarrow B(x)) \wedge (\text{les } x \text{ dans } F \text{ tels que } B(x) \text{ sont rares et souvent indisponibles}),$$

la réaction fréquente est: "Crois-tu donc que la beauté est la seule chose qui compte ?", autrement dit

$$\text{Quoi,}(\forall x \in F, C(x) \Leftrightarrow B(x))????$$

et d'enchainer sur "Imagine que tu trouves une fille jolie mais bête ou de mauvais caractère, que feras-tu ?", formalisable par ($\exists x \in F, B(x) \wedge \neg C(x)$!!!), ou encore par ($\neg(\forall x \in F, B(x) \Rightarrow C(x))$!!!). Et de conclure par un énoncé de pure bonté: "Je suis sûr(e) que tu trouveras", autrement dit : "$\exists$ beaucoup de x dans F tels que $C(x)$". Sans oublier la condition nécessaire pour y parvenir: "Tu dois changer de manière de penser".

. . . **par l'absence de Dieu**. . . l'existence d'un humain actuellement sur Terre capable de recevoir des messages de Dieu aurait suffit à faire de F un ensemble: Dieu lui aurait alors signalé de m'envoyer par email l'adresse de ma future femme (et/ou la mienne à celle-ci).

. . . **et de tout substitut:** un système d'annonce de rencontres en ligne suffisamment performant (rapide à détecter et faire sélectionner tous les contacts possiblement les meilleurs parmi des millions d'utilisateurs), ouvert (gratuit), et adopté par tous, comme ce dont j'ai conçu le plan et qui s'ajouterait au projet exposé sur http://spoirier.lautre.net/trustedforum.html, suffirait à remplir la fonction ci-dessus. Mais il y a deux problèmes: l'un est que cela dépend de la prise de contact avec un/des programmeur(s) prêt(s) à implémenter ce projet, à quoi s'oppose le fait que la classe des programmeurs n'est actuellement pas non plus un ensemble; l'autre est que la diffusion de l'annonce du projet, qui aurait pu résoudre ce dernier point, est bloquée par la morale religieuse qui tient avant tout à préserver Dieu de tout risque de chômage afin d'assurer son salaire de louanges.

1.F. Forces des théories des ensembles

La théorie des ensembles a de nombreuses variantes possibles. Il faut d'abord choisir un langage spécifiant les rôles plus ou moins élaborés des objets, d'ailleurs développables par définitions internes. Puis il lui restera toujours une infinité d'énoncés indécidables, reflétant la diversité de ses modèles possibles.

Les modèles se classent par leur *force*, mesure de leur extension apparente dans une certaine hiérarchie des formes d'infinités (définies par les énoncés clos, et que la preuve du théorème de complétude réduit à des structures différentes sur de semblables infinités de termes servant d'objets). Car tout modèle une fois présenté comme ensemble achevé, avec sa dynamique interne contenue dans une éternité passée, se trouve inclus dans un autre qu'on dira de force supérieure au premier.

Les axiomatiques ensemblistes se classent également par leur force, définie comme force minimale que chacune exige de ses modèles. Les axiomes sont normalement conçus pour y contribuer sans la limiter, excluant aussi seulement certains intermédiaires entre forces autorisées. Cette force d'une théorie des ensembles lui permettra d'assembler ses objets en théories et modèles, puis de produire entre ceux-ci la dynamique recherchée. Nous détaillerons les rares axiomes cruciaux garantissant la force utile en pratique et déterminant l'essentiel des questions de mathématiques courantes.

La première théorie des ensembles, de Zermelo, suffisait presque à fonder les mathématiques de base; à part l'axiome du choix, elle ne manquait que d'équivalents raisonnables de certains usages des opérateurs et du définisseur de fonctions. Ce manque fut comblé par l'axiomatique ZF, avec son schéma de remplacement et son usage massif des quantificateurs ouverts. Nous montrerons ultérieurement comment la lecture naïve usuelle de ce schéma viole le sens des quantificateurs ouverts et de la distinction entre ensembles et classes; et quelle interprétation beaucoup plus subtile peut vraiment le justifier comme donnant une force vertigineuse à la théorie sans contradiction.

Cette force dépasse encore celle où l'infinité des univers emboités épuise les moyens pour tout énoncé (même paramétré) d'en repérer la progression. En effet, à tout instant t satisfaisant ZF, tout énoncé dont la valeur ne s'est pas stabilisée avant t sur sa valeur en t (le théorème de Tarski en fournit), vient d'alterner indéfiniment ses valeurs juste avant t (au cours de la succession infinie d'univers précédents dont l'union est celui en t), aucun donc ne s'étant stabilisé sur la valeur opposée. D'où l'impossiblité de détecter l'ordre entre tous les univers intermédiaires au moyen d'énoncés.

Remarque: une classe à au plus un élément, peut encore n'être pas un ensemble, si cet éventuel élément est inaccessible, d'existence indéterminée. Cette possibilité est refusée par l'axiomatique ZF, qui pour intégrer dans son univers tous les objets descriptibles possibles, déclare achevée comme ensemble toute "petite" classe d'objets (dont les élément sont repérables par ceux d'un ensemble). Mais cette propriété de chaque univers autorisé oublie le point de vue dynamique: une classe peut apparaitre vide dans un univers $\mathcal{U}$ et découvrir son unique élément dans un univers plus large $\mathcal{U}'$ (et donc être un ensemble dans chacun) alors même que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ satisfont ZF. C'est pourquoi l'admission des petites classes garde sa part de sens et de vérité malgré son exclusion par ZF.

1.G. Un ensemble peut-il appartenir à lui-même ?

Le paradoxe de Russell utilise la classe des ensembles qui ne s'appartiennent pas. Mais, les ensembles réflexifs (s'appartenant) peuvent-ils exister ? Cette question est indécidable; voici pourquoi.

Si on éliminait de l'univers tout ensemble réflexif, ils ne seraient pas reconstructibles par la donnée de leurs éléments, mais il resterait à éliminer tout autre ensemble qui en contient, et ainsi de suite.

L'autre solution est de reconstruire l'univers en les évitant: chaque ensemble apparaît à un certain instant, formé d'éléments préexistants dans un certain "univers" (classe ou ensemble d'objets) encore incomplet, pour s'intégrer à l'univers suivant. Mais ne pouvant préexister à sa propre apparition, il ne pourra pas appartenir à lui-même non plus. Cette propriété étant indépendante du contexte, une union d'univers chacun dépourvu d'ensemble réflexif, n'en contiendra pas non plus.

Inversement, on peut créer des univers contenant des ensembles réflexifs, par le biais suivant:

Devinette: quelle est la différence entre:
– Un univers avec un élément pur x et un ensemble y tels que $x \in y$ et $y \notin y$;
– Un univers avec un ensemble x et un élément pur y tels que $x \in x$ et $y \notin x$?

Réponse: le rôle de l'ensemble contenant x mais non y, joué par y dans le premier univers, est joué par x dans le second.

L'inexistence d'ensembles réflexifs, est un cas particulier de l'axiome de fondation. Le concept de relation bien fondée, introduit au texte 3, permettra de comprendre cet axiome et de justifier sa consistance, par un raisonnement qui traduit plus formellement celui que nous venons d'effectuer. Mais cet axiome est aussi inutile que les ensembles qu'il exclut.

1.H. Remarque sur les logiques alternatives

La théorie des ensembles ici développée est conforme au concept d'ensemble quasi-universellement admis (ne faisant que l'approfondir). Mais d'autres concepts de logiques et/ou d'ensembles existent.

Ainsi, certains logiciens développent la "logique intuitionniste", qui attribue à toute formule une incertitude comme nous avons présentée pour les énoncés, mais traitée comme modification de la logique booléenne pure (le rejet du tiers exclus, où non(non A) n'implique pas A), sans mention spéciale des quantificateurs comme source de cette incertitude. Ainsi l'union de $\{0\}$ et de $]0,1]$ serait incluse dans, mais non égale à $[0,1]$. (Je n'ai trouvé aucun intérêt à ce formalisme).

D'autre part (réflexion personnelle), certaines propriétés de la théorie de la mesure (dont la théorie des probabilités) seraient interprétables comme énoncés plus simples sur un autre type d'ensembles. Imaginons une variable aléatoire x tirée dans $[0,1]$, en tirant successivement à pile ou face chaque chiffre binaire jusqu'à l'infini. Soit E son domaine, ensemble des nombres aléatoires dans $[0,1]$. Il est non vide puisqu'on peut tirer au hasard de tels nombres, qui existent. Alors, un autre nombre $y \in E$, tiré indépendamment de x n'a aucune chance d'être égal à x: $\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y$. Des variables décrivant indépendamment le même ensemble ne peuvent plus prendre la même valeur.

Mais nous garderons les conceptions classiques sans égard à de telles mathématiques alternatives.