1. Théorie philosophique des ensembles

(approche non purement axiomatique de la théorie des ensembles)

1.1. Que sont les mathématiques et leurs fondements ?

La mathématique est l'étude des systèmes éventuellement infinis mais constitués de purs objets élémentaires, dont l'existence est abstraite, indépendante du monde physique ou quotidien. Chaque constituant (élément, relation…) de ces systèmes a pour seule nature le fait d'être exact, sans ambiguïté : deux objets sont égaux ou différents, reliés ou non, une opération donne un résultat exactement, etc. Chaque choix d'étude de tels systèmes est également mathématique, défini par des conditions exactes et finies.

La logique mathématique est une branche des mathématiques dont l'objet est l'étude des fondements des mathématiques, autrement dit la description (aussi mathématique que possible) du monde des mathématiques lui-même: ses éléments (objets, règles de construction et d'assemblage, propriétés), mais aussi son langage et ses règles de développement formelles, qui forment un système mathématique parmi les autres (un assemblage de symboles en relation avec les systèmes étudiés).

Cela ne semble-t-il pas être une chose claire, où l'on devrait savoir de quoi on parle ? Quels sont donc les fondements des mathématiques ? Paradoxalement, ce problème est très difficile, quoique (en un sens relatif satisfaisant) résoluble et plus raisonnable que la recherche de théories au fondement de la physique (dont les plus pointues sont d'une complexité monstrueuse). Sa complexité qui semble contraster avec l'élémentarité des objets mathématiques, vient notamment du besoin d'étudier par des outils finis (le langage) des systèmes infinis, ainsi que le langage d'étude lui-même.

En fait, à force chercher les fondements (à l'inverse du développement normal des mathématiques qui les suppose acquis et s'en éloigne), et de s'interroger sur la nature de chaque fondement qu'on semble rencontrer (le fondement du fondement et ainsi de suite), on trouve finalement en guise de fondement, non une base nette et définitive mais une vaste dynamique plus ou moins bouclée sur elle-même, enchaînant des étapes assez simples et d'autres plus compliquées. Mais cette situation n'est pas un échec, car ce cycle joue véritablement un rôle fondateur pour les mathématiques, ses détails étant instructifs, riches de développements utiles à diverses branches des mathématiques.

Cela n'est pas si surprenant : ne sommes-nous pas habitués aux dictionnaires qui définissent chaque mot par d'autres mots. On a même une autre science d'étude des systèmes finis d'objets élémentaires, dont les fondements sont sujets à ce même paradoxe : l'informatique. On peut en effet simplement utiliser les ordinateurs, sachant ce qu'on fait mais sans savoir pourquoi cela fonctionne. Leur fonctionnement se fonde sur les langages de programmation et le code source des logiciels (dont le système d'exploitation), qui ont été rédigés en utilisant déjà des logiciels, dont un logiciel de compilation qui a dû être écrit dans un certain langage. Il se fonde aussi sur le matériel et l'architecture du processeur, dont la conception et la fabrication industrielle ont été assistées par ordinateur. Et c'est ainsi nettement plus facile que lors de la naissance ex nihilo de cette discipline.

Le monde mathématique est structuré en théories (en nombre infini…). Chaque théorie étudie les mondes mathématiques formés d'une liste donnée de types de constituants et de structures qui les relient de manière conforme à certaines conditions (les *axiomes* de la théorie). (Est-ce pour cela qu'on parle *des* mathématiques au pluriel…). Implicitement ou explicitement, toute étude mathématique se situe dans le cadre d'une certaine théorie.

Chaque théorie peut être abordée et interprétée de deux manières : un point de vue réaliste et un point de vue formaliste.

Le point de vue réaliste (on peut aussi dire *idéaliste* ou encore *platonicien*) consiste à penser que les systèmes mathématiques et leurs propriétés sont une réalité indépendante, préexistant à leur étude, laquelle n'est qu'un acte d'exploration (Platon l'appelait un ressouvenir). C'est l'approche de l'intuition, par laquelle on tente de s'orienter en flairant l'ordre global de la réalité mathématique.

Le point de vue formaliste regarde les théories sous l'angle du développement de formules, partant des symboles et de leurs règles d'assemblage. C'est l'approche rigoureuse, qui part de fondements précis, et chemine conformément aux règles. Chercher les fondements d'une idée ou d'une théorie, c'est la formaliser (transformer l'intuition en rigueur), expliciter une construction qui y aboutit.

Alors, que sont les fondements des mathématiques en général ou d'une théorie en particulier, et pourquoi s'en préoccuper ? D'abord et à chaque instant, le fondement est ce qu'on connaît ou qu'on a choisi d'accepter qui définit la théorie dans laquelle on se trouve, et d'après quoi on peut avancer. Avancer, c'est développer la théorie, explorer ses développements possibles. Ces développements sont de nouvelles notions et connaissances qui résultent du fondement précédent et s'y ajoutent pour constituer le fondement suivant.

Pour développer une théorie, il faut choisir un développement à effectuer parmi les développements possibles; mais ce qu'on ne choisit pas de développer à un instant n'est pas perdu en développant autre chose, car le fondement qui pouvait l'engendrer subsiste dans le fondement suivant et pourra toujours l'engendrer plus tard. Ainsi, pour toute théorie mathématique présentée par un fondement, on peut définir sa réalité comme étant la totalité de ses développements possibles. Mais le travail fondamental consiste plus précisément à développer les fondements les plus utiles possibles, c'est-à-dire clairs et par lesquels on pourra plus efficacement et directement avancer, nous rapprochant d'un maximum d'horizons. Or ces meilleurs fondements ne pourront se construire que par un travail considérable (mais intéressant) à partir d'un fondement initial simple et naturel.

Il est bien sûr impossible de tenir une démarche totalement réaliste, à cause de la finitude de l'intelligence humaine seulement capable d'effectuer des raisonnements traduisibles (avec plus ou moins de difficultés) en développement formel fini à partir d'un certain fondement (une telle réduction en structure finie garantissant que l'intuition ne nous trompe pas).

De plus, on verra que la réalité mathématique résiste elle-même à la conception réaliste qu'on peut en avoir. En effet, pour pouvoir invoquer l'existence d'une réalité mathématique il faudrait d'abord préciser laquelle, autrement dit en choisir une théorie. Mais même une telle réalité peut présenter un caractère irréductiblement dynamique capable de repousser ses limites toujours plus loin que sa totalité supposée. Heureusement, on peut surmonter ce défaut en formulant une conception théorique de réalités très larges (proches du réalisme) par une théorie axiomatique relativement simple (ZF) ...

Mais une approche qui se voudrait formaliste ne pourrait pas l'être totalement non plus, car elle dépendra toujours d'un choix initial de fondement admis plus ou moins arbitraire à l'intérieur de la réalité mathématique, et dont la clarté et l'auto-suffisance demeurent relatives. Ce choix a dû au moins s'appuyer, soit sur un formalisme préexistant, soit sur des motivations et “évidences” intuitives, donc en quelque sorte réalistes. Sur un problème donné, une vision intuitive peut parfois apparaître plus claire qu'un raisonnement rigoureux. En pratique, on travaille généralement avec des preuves semi-formelles, paraissant rigoureuses à l'appréciation d'une intuition qui “sent” qu'une formalisation totale serait possible, sans en avoir explicité les règles complètes.

Enfin, cette dynamique des mathématiques qui se développent à partir de fondements ne concerne pas seulement l'intérieur de chaque théorie mais aussi les relations entre les théories : il y a des théories plus élémentaires ou fondamentales (par exemple pouvant partir d'un fondement plus simple) qui peuvent servir de fondements à d'autres théories, d'une manière parfois plus pertinente que si l'on cherchait des fondements à l'intérieur d'une théorie donnée : les constituants du fondement d'une théorie ne sont plus alors vus comme un bloc toujours indissociable mais une partie d'entre eux peuvent prendre un sens (celui d'une théorie plus simple) indépendamment des autres, ouvrant la voie au développement potentiel d'autres théories complexes ayant cette partie en commun.

1.2. A propos de théorie des ensembles

Le cycle fondateur des mathématiques étant assez complexe, on ne peut pas en donner au départ une image globale bien claire, et ce serait d'ailleurs inutile, puisque c'est de choses simples qu'il faut partir. Disons seulement qu'il se résume principalement à deux théories.

La *théorie des ensembles* s'intéresse aux objets mathématiques, en partant des objets les plus élémentaires puis en construisant progressivement les autres. Mais, formellement, il y a plusieurs théories des ensembles possibles concurrentes et non équivalentes (potentiellement une infinité).

La *théorie des modèles* est la théorie des théories axiomatiques, de leurs significations appelées modèles (les possibles mondes que ces théories étudient) et des démonstrations. Elle se trouve compliquée par l'inclusion, dans son étude, du langage formel des théories. Mais elle est élégante et essentiellement unique: toutes ses formalisations possibles sont en quelque sorte équivalentes, ceci donnant aux concepts de théorie et de théorèmes d'une théorie, une signification claire et universelle. On peut regretter que malgré son intérêt fondamental et sa relative simplicité (sauf peut-être pour la théorie des démonstrations, dont le choix de formalisme officiel me semble fastidieux et inopportun), la théorie des modèles demeure ignorée de l'enseignement de premier cycle universitaire.

Théorie des ensembles et théorie des modèles sont les deux faces complémentaires des fondements des mathématiques qui se partagent suivant diverses parts de pertinences les rôles de fondements effectifs des différentes branches des mathématiques. Chacune est le cadre dans lequel l'autre peut être formalisée rigoureusement. Les notions de théories et de leurs modèles dont parle la théorie des modèles, se construisent comme objets mathématiques parmi les autres en théorie des ensembles; et toute théorie des ensembles se formalise en une théorie axiomatique comme les autres en théorie des modèles. Mais ces formalisations sont un travail assez difficile, qui ne sera complété qu'ultérieurement.

Au fait, la théorie des modèles est-elle formalisable comme une théorie cas particulier de sa propre étude ? Oui bien sûr, sauf que ce serait nettement plus compliqué que la théorie des ensembles (dépendant d'une grande quantité de théorèmes), et qu'il est donc beaucoup plus naturel de démarrer par celle-ci pour ensuite progressivement construire la théorie des modèles par développement interne.

Pour démarrer les mathématiques, il faut choisir un point de départ, un ensemble de notions relativement simples qu'on puisse introduire d'abord sans s'appuyer (ou plutôt en faisant semblant de ne pas s'appuyer) sur d'autres notions. C'est un petit lieu progressivement éclairé et agrandi dans un monde obscur, encore inconnu. Aucun point de départ n'est parfaitement autonome, mais il se trouve dans le cycle fondateur, des étapes plus adéquates que d'autres à ce rôle.

Il apparaît plus opportun de démarrer par une théorie des ensembles partiellement formalisée, sans forcément de liste précise d'axiomes, ni d'ancrage dans le cadre formel de la théorie des modèles. On peut appeller cela une *théorie naïve des ensembles*, pour distinguer cette approche de celle de théorie axiomatique. La tradition est d'introduire une théorie naïve des ensembles en supposant, en réponse à toute question, qu'elle serait l'expression vulgarisée ou implicite du système ZFC (axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix), comme si cela était évident ou nécessaire.

Or déjà, il serait inexact de présenter les axiomes d'une théorie comme "intuitivement évidents". D'autres évidences et aspects des fondements des mathématiques, issus de la théorie des modèles, ont dû être admis avant tout axiome, pour donner à ceux-ci leur rôle. Celui-ci est justement d'ajouter à ces nécessités d'autres informations a priori moins nécessaires (non démontrables). Et leur choix n'est pas toujours intuitif a priori (à moins de ne les comprendre que comme fruits d'une sélection historique de choix intuitifs hasardeux trouvés cohérents), mais peut dépendre de motivations plus élaborées.

En fait, la théorie ZFC fut d'abord sélectionnée par les logiciens professionnels pour leur propre usage (celui d'axiomatique puissante inscrite dans un cycle fondateur élargi pour mieux chasser les énoncés indécidables) où elle convient effectivement. Notamment, les constructions utiles à partir de ZFC une fois acquises, la difficulté du parcours effectué pour combler la dissemblance de forme entre l'axiomatique et son usage, ne compte plus pour un logicien. C'est donc un critère de choix très éloigné de celui qui va nous préoccuper ici, à savoir celui de référence théorique pour une théorie naïve des ensembles comme démarrage des mathématiques.

Or cette question de référence théorique contient celle du choix d'une axiomatique adéquate, mais ne s'y réduit pas. Car (tout comme pour la question plus générale des fondements des mathématiques) toute axiomatique restera à relativiser par d'autres connaissances des fondements en général, et par la concurrence d'autres options en particulier.

Hélas, cette question est restée orpheline, et avec elle les auteurs de cours élémentaires sur les ensembles, qui n'ont rien de trouvé de mieux à faire que de se rattacher à l'autorité morale des logiciens, leur emboîtant le pas vers le choix de ZFC sans se poser plus de questions.

Or en l'occurence, en tant que choix d'axiomatique comme reférence pour une théorie naïve, le système ZFC a plusieurs défauts, n'étant ni le plus naturel ni un bon reflet de l'usage pratique des mathématiques, et ni ZFC ni la manière dont il peut fonder la théorie naïve n'est évident.

Contentons-nous pour l'instant de mentionner son hypothèse que tout objet est un ensemble, et donc un ensemble d'ensembles indéfiniment (construits sur l'ensemble vide). Certes une autre théorie axiomatique secondairement officielle (NBG) y ajoute les classes comme autres objets, mais ce ne sera pas non plus notre option (et nous expliquerons pourquoi). En effet en pratique, beaucoup d'objets (éléments des ensembles considérés) "sont" de purs éléments en ce sens qu'on ne les utilise pas en tant que quoi que ce soit de plus (on ne discute pas de leurs éléments si ce sont des ensembles). Cela ne contredisant pas formellement l'idée que d'autre part ce sont tous des ensembles, cette utilisation des purs éléments n'a pas eu besoin d'être formalisée, mais demeure une étrange discordance entre la "théorie" officielle et la pratique des mathématiques.

Nous allons présenter une nouvelle solution au problème du démarrage des mathématiques, sous forme d'une théorie des ensembles non purement axiomatique, enrichie d'explications intuitives et philosophiques détaillées. Une sorte de *théorie philosophique des ensembles*. Le but est d'exprimer aussi fidèlement que possible les usages des mathématiques et la perspective de ses fondements, pour armer au mieux un lecteur a priori naïf face aux problèmes, risques d'illusions, de paradoxes ou autres questions existentielles qu'il pourrait se poser. Ses axiomes formels ne seront introduits que très progressivement au rythme des besoins. Ce n'est que bien plus tard (texte 5) que sera enfin complète la liste des axiomes nécessaires aux besoins (dont certains optionnels). Le choix final d'une théorie axiomatique sera donc vu comme une des dernières étapes du cycle fondateur des mathématiques, une clé de voûte d'un système beaucoup plus large. Finalement nous expliquerons en quoi la lecture naïve usuelle du schéma d'axiomes de remplacement pose problème, et quelle interprétation plus subtile permet réellement de le justifier.

Nous reconnaîtrons trois sortes différentes d'objets mathématiques: les éléments, les ensembles et les fonctions. Ce choix d'admettre les fonctions comme notion primitive, permettra de construire les autres concepts mathématiques plus naturellement et logiquement qu'à partir des ensembles seuls. (En fait, on commencera par reconnaître encore d'autres objets primitifs, puis montrer comment ceux-ci se construisent naturellement en termes d'ensembles et de fonctions). Mais en dehors de tous ces objets il faut également introduire le langage formel de leur étude.

1.3. Notions de théorie des ensembles

Le langage mathématique est fait de symboles. Commençons par les plus simples cas.

Constantes

Un *symbole de constante* est un symbole désignant un objet mathématique bien précis, appelé sa *valeur*. Par exemple le chiffre 3, les symboles "$\emptyset$", "$\mathbb{N}$" sont des symboles de constantes qui désignent respectivement un nombre et des ensembles précis. Le langage courant comporte aussi de nombreux symboles de constantes: tout nom propre et tout nom précédé d'un article défini ("le", "la") (sans complément, sinon ce serait une formule) joue le rôle de symbole de constante en langage courant.

Variables libres ou liées

Un *symbole de variable* est un symbole qui a aussi vocation à avoir une valeur, mais n'en a pas nécessairement une seule possible. Son éventuelle valeur (l'objet mathématique qu'il désigne) est un choix, l'objet d'une interprétation particulière. Chaque interprétation possible (un point de vue "de l'intérieur") attribue au symbole de variable une valeur particulière, et le voit donc comme une constante, ayant une valeur bien précise parmi les possibilités.

Mais il y a aussi le point de vue "de l'extérieur", de la maîtrise de l'étendue des interprétations possibles. Cette possibilité d'évoquer divers objets comme valeurs possibles d'une même variable, permet d'exprimer par un langage fini des généralités sur des objets mathématiques bien plus nombreux.

On appelle *fixer une variable* le fait de supposer choisie une valeur de cette variable, et ainsi d'entrer (provisoirement) dans une interprétation particulière possible ("de l'intérieur") de cette variable, où elle semble constante. Mais la situation de ce monde "de l'intérieur" où la variable semble constante, est une situation qui vue de l'extérieur dépend en fait de la valeur prise qui n'a pas été précisée. Ce qui sera fait dans ce cadre reste valide quelle que soit la valeur prise parmi les possibles, à moins bien sûr de distinguer explicitement différents cas. On dit qu'une variable est *libre* tant qu'elle demeure fixée, autrement dit qu'elle est traitée comme une constante, qui dans toutes ses occurences est supposée désigner une même valeur, sans égard à toute autre possibilité.

Mais quand on passe au point de vue de l'extérieur (qu'on perçoit l'étendue des interprétations possibles), la variable est alors dite *liée*.

Bien sûr, ces expressions ne qualifient ni ne changent pas les symboles eux-mêmes ni leur signification, mais les mouvements de la subjectivité de l'observateur (ou les transitions entre différentes subjectivités) vis-à-vis de ces symboles; mais nous nous comprenons, et cela se traduira ensuite de manière formelle. Nous continuerons à jouer avec la subjectivité abstraite, en qualifiant les choses et "définissant" les notions de domaines et d'ensembles, d'une manière pas forcément rigoureuse ou absolue, mais pouvant dépendre de l'observateur, et seulement clairement interprétable pour un observateur fixé (une sorte abstraite et mathématique d'observateur, non un observateur humain).

Domaines et ensembles

On appelle *domaine* d'une variable, le concept (la connaissance) de la totalité des valeurs possibles ou autorisées de cette variable, à condition qu'un tel concept (point de vue global sur toutes ces valeurs) existe. Autrement dit c'est la signification de la variable vue comme liée, à condition qu'elle puisse effectivement être entièrement liée. Cela voit les valeurs possibles comme données en vrac sorties de leur contexte, sans ordre ni égard au reste de ce qui peut être lié au choix d'une valeur particulière.

Le domaine d'une variable est un objet mathématique appelé un *ensemble*.

Entendons là encore qu'il ne s'agit pas de capacité de conception humaine, mais d'une sorte mathématique abstraite de "pensée", effectivement capable de "concevoir" des multiplicités d'objets éventuellement infinies (tandis que la pensée humaine n'en est capable que comme faire-semblant, par analogie, sans connaissance réelle de cette infinité).

Avant que la domination de l'approche axiomatique de la théorie des ensembles n'ait fait perdre le sens de ces notions dans les cours standard, Cantor les avait exprimées en des termes intéressants, dont voici quelques extraits pertinents.

Il définissait un ensemble comme "*un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée*". Par ailleurs, dans ses Lettres à Dedekind (1899) : "*Si la totalité des éléments d'une multiplicité peut être pensée comme "existant simultanément", de telle sorte qu'il soit possible de la concevoir comme un "seul objet" (ou un "objet achevé"), je la nomme une multiplicité consistante ou un "ensemble".*" Ce terme de multiplicité traduit la notion de variable, à savoir qu'il s'agit de la multiplicité des valeurs possibles d'une variable (valeurs appelées éléments de la multiplicité).

Par ailleurs il y a l'autre cas de figure, où d'après lui "*l'admission d'une coexistence de tous ses éléments mène à une contradiction*", ce qu'il appelle une "*multiplicité inconsistante*". Mais ceci doit être corrigé: il ne suffit pas qu'un énoncé soit irréfutable pour être vrai. En particulier il ne suffit pas qu'une certaine coexistence, si postulée, soit exempte de contradiction, pour exister véritablement (imaginez que deux coexistences soient consistantes chacune séparément mais contradictoires entre elles !). De fait, il y aura un grand exemple de coexistence admise et espérée irréfutable mais impossible à établir: l'axiome des parties.

La "connaissance" de toutes les valeurs possibles d'une variable, qu'exprime son domaine, est supposée réutilisable: étant donné un ensemble E, on peut introduire autant qu'on veut de nouvelles variables de même domaine E indépendantes entre elles et des autres variables en présence.

Si dans un contexte figure un symbole x de variable liée de domaine E, alors on peut aussi bien remplacer simultanément toutes les occurences (tous les usages) de x par celles d'un autre même symbole de variable, par exemple y, du moment que y n'intervient pas déjà dans le même contexte, et qu'on lui donne alors le même domaine E: cela ne change pas la signification du tout, contrairement au cas d'un symbole de variable libre. Autrement dit, ce que je dis à l'aide du symbole x, je peux le dire aussi en renommant x en y pour signifier la même chose, puisque l'emploi de x n'est en fait qu'une notation intermédiaire pour décrire une propriété de son domaine E.

Pour le dire de façon imagée, dans le monde syntaxique, dire qu'une variable est liée de domaine E c'est se situer soi-même du point de vue de l'extérieur d'une boîte marquée de E, et dans laquelle cette variable est enfermée; non seulement le choix d'une valeur mais aussi le nom lui-même de la variable n'ont de réalité qu'à l'intérieur de la boîte, non à l'extérieur.

Par un léger abus de langage, on pourra réemployer une même lettre pour désigner plusieurs variables liées séparées (enfermées dans des boîtes séparées), autrement dit telles qu'on n'a jamais plus d'une d'entre elles fixée à la fois: elles peuvent prendre des valeurs différentes chacune de son côté, puisqu'on n'en a jamais deux interprétées en même temps et qu'on ne peut donc pas les comparer. Remarquons qu'en langage courant on fait sans cesse cet abus, ne disposant que d'un nombre fort réduit de symboles de variables ("lui", "elle", "eux", et quelques autres), au risque de toutes les confusions.

Etant donnés un ensemble E et un symbole de variable x, on dit que *x parcourt E* pour signifier qu'on l'utilise comme ayant pour domaine E.

Notion de fonction

On appelle *fonction* un objet mathématique f constitué des données suivantes:

- Un ensemble appelé *domaine* ou *ensemble de définition* de f et noté $\mathrm{Dom}\, f$.

- Pour chaque élément x de $\mathrm{Dom}\, f$, est donné un objet appelé *image de x par f* ou *valeur de f en x*, noté $f(x)$.

On peut réexpliquer une fonction f comme étant une entité où s'attache une variable liée, appelée l'*argument* de f et de domaine est noté $\mathrm{Dom}\, f$, et qui, lorsqu'on fixe celui-ci (qu'on lui choisit une valeur), donne à son tour une valeur unique (comme ferait une constante, sauf que cette valeur dépendant de celle de l'argument). L'argument étant une variable liée, demeure invisible, non figuré par une lettre particulière. Mais on peut aussi l'expliciter comme symbole de variable, suivant la notation où il est vu comme libre. A savoir, prenant par exemple la lettre z pour le symboliser comme variable libre, la fonction f se traduit en l'expression $f(z)$, de valeur l'image de z par f.

Notion d'opération

La notion d'*opération* généralise la notion de fonction au cas où il y a non plus un seul argument mais une liste finie d'arguments (variables de domaines respectifs donnés) dont dépend le résultat (la valeur, l'image). Le nombre de ces arguments s'appelle l'*arité* de cette opération. Une opération (et de même plus tard un opérateur, un prédicat, une relation) est dite *n-aire* si son arité est n. En particulier elle est dite *unaire* si $n = 1$ (c'est une fonction), *binaire* si , $n = 2$, et *ternaire* si $n = 3$.

Soit par exemple une opération f binaire, et soient E et F les domaines respectifs de ses arguments. Ainsi on note $f(x, y)$ la valeur de f lorsque les valeurs de ses arguments sont celles des variables libres x et y. Mais si on relit cette expression en regardant les variables x et y comme liées de domaines E et F, elle désigne alors la traduction de f où le rôle des arguments est joué par les symboles x et y au lieu des positions gauche et droite dans la parenthèse.

Une opération d'arité zéro, tout comme une constante, prend une unique valeur. La notion d'opération d'arité zéro est donc inutile, chaque telle opération étant dans son usage remplaçable par sa valeur (une variable désignant une telle opération est ainsi remplaçable par une autre variable...).

Une opération unaire est essentiellement la même chose qu'une fonction. Mais on montrera plus loin comment la notion de fonction suffit en fait pour construire les opérations de toutes arités. (Les ensembles pourraient aussi suffire à eux seuls mais cela serait moins naturel).

1.4. Objets, méta-objets, théorie du modèle

En vue d'expliquer le plus clairement possible, avec toutes leurs étrangetés, les notions de théorie des ensembles qui serviront de cadre aux textes suivants, introduisons d'abord leur contexte méta-mathématique, en évoquant d'autres théories contribuant au cycle fondateur des mathématiques.

On appellera *théorie générique* le cas général d'une théorie quelconque, formulée conformément à un certain formalisme standard général (défini par la théorie des modèles) qui sera évoqué plus loin. Toutes les théories particulières, y compris les théories des ensembles et les autres théories ci-dessous, sont des cas particuliers de théories génériques, ou du moins sont traduisibles en de telles théories.

Toute théorie générique, et par là toute théorie vue sous forme de sa traduction en une théorie générique, vise à exprimer l'étude d'un système appelé modèle. Dans tout le développement d'une théorie, le modèle est supposé fixe, tel une variable qui resterait toujours libre et implicite, ne figurant pas parmi les variables employées dans le formalisme de cette même théorie.

La *théorie des modèles* est l'étude générale des théories et de leurs modèles possibles; et considère donc celles-ci comme variables.

La *théorie du modèle* est une version de la théorie des modèles restreinte à l'étude d'une théorie générique fixe munie d'un modèle fixe.

En théorie du modèle, on appellera *objet* tout ce qui peut servir de valeur à une quelconque variable à disposition du formalisme de la théorie. Le modèle est constitué des objets mais aussi des structures qui les relient, et qu'on décrira plus loin. En théorie des ensembles, tout résultat d'une fonction ou opération est aussi une valeur possible d'une variable, et est donc aussi un objet.

Malgré que dans chaque théorie particulière, les objets sont souvent intuitivement compris comme plus ou moins complexes (ensembles, opérations et autres), dans l'étude systématique des théories génériques on considèrera tous les objets comme des éléments purs. C'est que la traduction des autres théories en théorie générique, transforme n'importe quoi en éléments purs qui seulement joueront les rôles voulus.

Voici le classement des différentes notions que nous allons aborder, prolongé du cas de théories plus familières à titre d'illustration.

Théorie	**Objets**
Théorie générique	Eléments purs classifiés par sortes
Théorie des ensembles	Eléments, ensembles, fonctions (+ opérations, relations)
Théorie du modèle	Objets, symboles, sortes, opérateurs, prédicats, classes, formules, axiomes...
Théorie des modèles	Théories génériques, modèles et leurs constituants.
Arithmétique	Nombres entiers
Algèbre linéaire	Vecteurs, scalaires...
Géométrie	Points, droites, cercles...

Le fonctionnement d'une théorie générique étant explicité par la théorie du modèle, regardons celle-ci de plus près, en oubliant que la théorie générique considérée puisse en particulier exprimer une théorie des ensembles, avec les notions associées. Comme les notions d'ensembles, de fonctions et d'opérations n'existent qu'en théorie des ensembles, elles vont ici disparaître... au profit d'autres notions qui y ressembleront étrangement, mais ne doivent pas être confondues avec.

Inutile de faire comme si cela n'avait rien à voir: ce sont toujours des mathématiques, donc exprimables en termes ensemblistes. Seulement, le langage ensembliste vient d'abord un instant fonder la théorie du modèle, tandis qu'on oubliera ensuite ce premier rapport pour ensuite introduire formellement une théorie des ensembles comme théorie particulière. Or, ce qui est qualifié d'une certaine manière en termes ensemblistes fondateurs de la théorie du modèle, pourra apparaître très différent (ou rester insaisissable) dans les termes d'une théorie des ensembles fondée par elle. Il ne faut donc surtout pas confondre l'une et l'autre manière de qualifier ensemblistement une même chose.

Les objets d'une théorie générique se classent par sortes, ce qui sert de substitut à la notion d'ensemble. Chaque sorte est un ensemble d'objets, mais chaque objet est d'une seule sorte. En pratique, chaque théorie générique considérée n'aura qu'un nombre fini de sortes, disons n. Les sortes sont les seuls ensembles qui serviront de domaine aux variables de la théorie. Un tel cadre peut sembler restrictif vu de loin, mais toutes les ressources utiles pourront se reconstruire en son sein.

Les objets de la théorie du modèle sont d'une part les constituants d'une théorie générique, d'autre part ceux d'un modèle de celle-ci, et enfin quelques intermédiaires nécessaires.

Les constituants d'une théorie générique (qui varient arbitrairement d'une théorie générique à une autre et la déterminent), sont: la liste des sortes (vues symboliquement sans leurs éléments), celle des symboles de structures, et l'ensemble des axiomes. Nous introduirons plus loin les structures et leurs symboles, et bien plus tard les axiomes.

Les constituants d'un modèle sont : la donnée, pour chaque sorte, d'un ensemble effectif d'objets (éléments) qui l'interprète; et la donnée de structures reliant ceux-ci, interprétant les symboles et devant satisfaire les axiomes.

Pour toute notion de théorie du modèle, donc toute notion employée pour l'étude d'une théorie générique supposée fixée, on pourra la réemployer munie du préfixe méta- pour l'appliquer à cet autre cas de théorie qu'est la théorie du modèle dans laquelle on se place. Par ailleurs le préfixe méta- pourra aussi être accolé à des notions ensemblistes, pour se référer au point de vue ensembliste fondateur de la théorie du modèle.

La notion d'objet d'une théorie générique constitue ainsi une méta-sorte parmi les autres. Comme toute sorte et de même toute méta-sorte s'interprète comme méta-ensemble (respectivement d'objets et de méta-objets), le méta-ensemble des objets sera appelé l'*univers*.

Pour mieux marquer la distinction, nous réserverons dorénavant l'appellation de *méta-objet* aux seuls méta-objets (objets de la théorie du modèle), qui soient d'une autre sorte que celle des "objets" (de la théorie générique). Autrement dit, tout ce qui appartient à l'univers de la théorie du modèle mais non à celui de la théorie étudiée.

On a ainsi la méta-sorte des symboles de variables. Avec la sorte des objets, on peut décrire cela par un tableau à 2 lignes et n colonnes: la première ligne contient les symboles de variables, la deuxième contient les objets, et chaque colonne représente une sorte de la théorie étudiée. Chaque symbole de variable, étant situé dans une des cases du haut, a pour domaine l'ensemble des objets figurant dans la case du bas correspondante.

Puis, on a la méta-sorte *booléenne*, comportant uniquement deux éléments désignés par les méta-constantes "vrai" et "faux", appelés les "valeurs de vérité". Une méta-variable de cette sorte (donc de valeur vrai ou faux) sera appelée une *variable booléenne*.

1.5. Opérateurs et prédicats

Introduisons maintenant la méta-sorte des symboles de structures, divisée en deux sous-sortes: les symboles d'opérateurs, et les symboles de prédicats.

Un *opérateur* est une méta-opération dont chaque argument a pour domaine une sorte d'objets, comme toute variable de la théorie; et dont les valeurs sont des objets d'une même sorte. Un *prédicat* est une méta-opération semblable à un opérateur, sauf que ses valeurs sont booléennes. On appellera *structure* tout méta-objet qui est soit un opérateur soit un prédicat. (Un tel regroupement peut se formaliser en ajoutant la méta-sorte booléenne parmi les sortes d'objets; ou encore en traduisant chaque opérateur d'arité n en un prédicat d'arité $n + 1$).

Le modèle interprète chaque symbole de structure comme désignant une structure particulière. Or, le format de la structure que désignera chaque symbole est donné d'avance dans la théorie, comme une information attachée au symbole indépendante du modèle: la liste de ses arguments, présentés comme de simples méta-éléments seulement munis chacun de son sorte (étant liés, les arguments ne s'écrivent pas comme des symboles, mais ici par des espaces), dont le nombre donne l'arité du symbole; et à chaque symbole d'opérateur on donne la sorte qui sera celle de ses valeurs.

Pour chaque sorte on a un symbole de prédicat binaire dont les 2 arguments sont de cette sorte, appelé *égalité* et abusivement noté $=$ (sans indication de la sorte, déterminée en pratique par le contexte), désignant le prédicat d'égalité tel qu'on l'entend naturellement sur l'ensemble où il opère. Ce sont les seuls symboles de structures universellement donnés à toute théorie générique.

Au-delà des symboles d'égalité, chaque théorie donne sa propre liste de symboles de structures, appelée le *langage* de la théorie.

Les structures sont ce qui donne à chaque sorte d'objets son rôle, ce qui fait que (dans certaines théories) les objets d'une sorte semblent de nature très différente de ceux d'une autre sorte, alors même qu'à la base ce ne sont partout que de purs éléments.

En théorie des ensembles, le rôle des objets de sorte ensemble est donné par le prédicat binaire d'*appartenance*, noté $\in$, entre éléments et ensembles: étant donnés un objet x et un ensemble E, on dit que x *appartient à* E, ou x est élément de E, ou E *contient* x, et on note $x \in E$, pour signifier que x est une valeur possible d'une variable de domaine E.

Les fonctions reçoivent leur rôle à travers deux opérateurs déjà vus précédemment. D'une part, l'opérateur unaire Dom, de domaine la sorte des fonctions, à valeurs dans celle des ensembles, donnant de toute fonction son domaine. D'autre part, l'*évaluateur de fonction*, opérateur binaire qui de toute fonction f et tout objet x appartenant à $\mathrm{Dom}\, f$, donne la valeur $f(x)$.

Par la suite, nous enrichirons encore progressivement notre théorie des ensembles par d'autres symboles et outils. Leur liste aura une part d'arbitraire, expression du choix d'une théorie des ensembles particulière. Ainsi les objets de sorte "ensemble" seront utilisés au titre des ensembles qu'ils désignent, par d'autres moyens complémentaires de l'usage du prédicat d'appartenance, et de même pour les fonctions. Nous comblerons aussi les failles apparentes de cette formalisation de la théorie des ensembles en théorie générique, notamment le fait qu'un ensemble puisse être lui-même un élément, et que $f(x)$ n'a de sens que si $x \in \mathrm{Dom}\, f$.

Nous avions initialement défini la notion même d'opérateur en termes ensemblistes au niveau méta, à savoir comme étant une méta-opération. Or, le fondement ensembliste est ici très lointain, tandis qu'on veut plus précisément développer la théorie du modèle. On vient de voir comment formaliser des notions ensemblistes suivant le modèle d'une théorie générique. Dès lors aussi, pour la théorie du modèle, les notions mêmes de structures, d'abord définies en termes ensemblistes, seraient à retranscrire en méta-objets comme les autres, c'est-à-dire objets de la théorie du modèle, qui doit pouvoir s'exprimer comme une théorie générique comme les autres suivant sa spécificité, sans l'intermédiaire d'une théorie des ensembles.

Ceci présente plusieurs difficultés techniques qu'on ne détaillera pas ici, comme de savoir si les structures d'arité différente sont à voir comme une seule méta-sorte ou s'il en faut autant que d'arités, voire plus. Mais faisons une remarque plus philosophique. Si aucun objet d'une théorie n'est en lui-même quoi que ce soit de plus qu'un simple élément, qui ne fait que jouer un rôle à travers les structures désignées par des symboles du langage utilisé, alors en particulier en théorie du modèle on ne devrait plus parler des structures comme étant en elles-mêmes des structures, mais comme n'étant que des méta-éléments qui jouent des rôles de structures par le moyen des méta-structures (et ainsi de suite).

Très bien. Mais alors, qu'est-ce qu'un symbole de structure, si ce n'est un méta-élément qui joue un rôle de structure, exactement comme une structure elle-même n'est qu'un méta-élément jouant un rôle de structure ? De cette manière, reste-t-il encore une distinction à faire entre un symbole de structure et la structure qu'il désigne, pour mériter de les formaliser en 2 méta-sortes distinctes ? Evidemment que si l'on sort de la théorie du modèle pour considérer une diversité de modèles possibles pour une même théorie alors la différence est flagrante. Mais pour s'en tenir à la théorie du modèle, à formaliser comme théorie générique particulière, une telle distinction doit-elle demeurer ?

En fait oui, car non seulement il existe d'autres structures que celles désignées par un symbole du langage de la théorie, mais surtout certaines de ces autres structures interviendront effectivement (par exemple pour enrichir le langage par un nouveau symbole désignant une structure qui n'avait pas encore été désignée, bien que cette procédure ne soit pas vitale à la théorie du modèle). (L'éventualité que deux symboles puissent désigner une même structure, n'est qu'une question insignifiante ici).

Ainsi, alors que "par nature" il n'y aurait pas de différence entre un symbole de structure et la structure qu'il désigne vus individuellement (les deux recevant les mêmes rôles par les mêmes moyens, sauf bien sûr que seuls les symboles sont utilisables dans les formules), les deux notions se distinguent vues collectivement, pour la différente étendue de leur domaine comme méta-variable. Donc, si pour définir la méta-sorte des symboles de structures il n'a pas suffi de décrire le rôle de chaque élément (comme méta-variable libre) mais il a aussi fallu en préciser ou interpréter le domaine de variation (le méta-ensemble de ses valeurs comme méta-variable liée: celui-ci est le langage de la théorie), et si la méta-sorte des structures répond à la même définition individuelle, n'est-il pas nécessaire, pour compléter sa description, de préciser également son domaine ?

On serait naïvement tenté d'y répondre sur la base de l'environnement ensembliste supposé fixe dont on est parti, en disant: les structures sont simplement *toutes* les méta-opérations satisfaisant les critères requis. Hélas, il s'avèrera que même cette définition n'a pas de sens absolu, car il n'y a pas de tel "toutes" qui ne dépende irréductiblement de l'environnement de la théorie et de son modèle dans lequel tout cela est introduit, et dont aucun ne peut prétendre être l'ultime.

Il faudrait donc délimiter la sorte des structures autrement. Et de fait, nous allons effectivement bientôt introduire une telle délimitation, plus large que celle des seuls symboles figurant dans le langage, et qui sera réellement pertinente pour servir de sorte des structures en théorie du modèle. Quelque chose d'un peu plus précis que cette non-définition en cercle vicieux: appeller "structures" les méta-opérations qu'on considèrera à ce titre (respectant les sortes), et uniquement celles qu'on considèrera. Ceci complètera la notion de structure en théorie du modèle, et la libérera de son interprétation ensembliste au niveau méta, par laquelle nous l'avions introduite.

1.6. Termes et énoncés sans variable liée

Etant donné le langage d'une théorie, on appelle *terme* un assemblage fini d'occurences de symboles, visant à désigner un objet appelé sa valeur, une fois fixés un modèle et une attribution de valeurs aux variables libres qu'il utilise. Une occurence d'un symbole est un lieu où on le place, par exemple le terme "$x + x$" comporte 2 occurences du symbole x, et une occurence du symbole d'addition.

On appelle *énoncé* un système semblable à un terme sauf que ses valeurs sont booléennes. Les termes et les énoncés constituent deux sortes de méta-objets qui, par leur similitude, seront regroupés en l'appellation de *formule*. Une formule est donc un terme ou un énoncé.

Les formules devront satisfaire à certaines conditions qu'on précisera plus loin, pour pouvoir ainsi prendre des valeurs déterminées une fois fixées les valeurs des variables libres. Une formule satisfaisant ces conditions sera dite *valide*. Ainsi, ayant fixé le modèle et les valeurs des variables libres, un énoncé valide sera vrai ou faux, tandis qu'un énoncé invalide ne sera ni vrai ni faux.

L'idéal serait de n'employer que des formules valides dans chaque théorie, oubliant les formules invalides. L'expression "formule valide" devienue un pléonasme se simplifierait en "formule". Ce serait possible avec les théories génériques, où la validité des formules se réduit à des règles syntaxiques. Mais en théorie des ensembles les règles de validité seront plus complexes et non purement syntaxiques.

Chaque formule consistera en la donnée d'un symbole appelé le *symbole principal* de la formule, et d'une éventuelle liste d'occurences d'autres symboles ou formules. Le symbole principal d'une formule détermine la sorte de ses valeurs y compris booléenne, et donc détermine si c'est un énoncé ou bien un terme. Puis il détermine aussi le format de la liste des autres symboles ou formules attachées.

Typographiquement, chaque symbole pouvant servir de symbole principal d'une formule plus longue que lui, est doté d'un format conventionnel de présentation de cette liste par rapport à lui. Notamment les symboles de structures binaires sont souvent figurés entre leurs arguments: par exemple l'addition est notée $x + y$ au lieu du format standard $+(x, y)$ qu'on avait annoncé pour les opérations.

Même parfois, sans raison précise, la convention représentera ce que nous appelons ici *symbole* (car cela joue bien le rôle d'un symbole), sous une forme qui ne ressemble pas à un symbole, mais sous forme de zéro caractère (comme le symbole de puissance dans x^n) ou plusieurs caractères aidant à délimitater les sous-formules employées. Par exemple, le symbole principal de $f(x)$ est l'évaluateur de fonction, noté par les parenthèses. Les parenthèses peuvent aussi servir à la notation d'autres symboles, mais aussi servir d'accessoires pour mettre en évidence le choix du symbole principal de chaque formule et la répartition des autres symboles en sous-formules. Exemple: $(x + y)^2$.

Il y a trois grandes sortes de symboles constituant les formule: les symboles de variables, les symboles d'opérateurs au sens large, et les symboles liant des variables.

Un *opérateur au sens large* est un opérateur en un sens où la sorte booléenne est ajouté à la liste des sortes disponibles. La liste de ses arguments détermine celle des sous-formules attachées et leurs sortes respectives. Tous les symboles de structure (dont les symboles de constantes) sont de ce type.

Les seuls autres opérateurs au sens large (ceux ayant au moins un argument booléen) utiles en pratique, ne seront pas regardés comme des structures car ils seront donnés de manière standard, indépendants du choix d'une théorie et de son modèle, ne participant pas à la constitution de celui-ci. Il s'agit principalement des connecteurs, même si deux autres s'y ajouteront plus loin.

Connecteurs

On appelle *connecteur* un opérateur au sens large (ou méta-opérateur) dont tous les arguments et les valeurs sont booléens. Enumérons les plus utilisés en pratique par leurs symboles respectifs.

Ceux d'arité zéro sont les deux constantes booléennes "vrai" et "faux".

Un seul connecteur d'arité 1 est utile: la négation, notée "non". Il échange les deux éléments: non(vrai) = faux, et non(faux) = vrai. On l'abrège parfois en barrant le symbole principal de l'énoncé auquel il s'applique: $x \neq y$ signifie non($x = y$) et se lit "x est différent de y". De même, $x \notin E$ signifie non($x \in E$) et se lit "x n'appartient pas à E".

Quatre connecteurs d'arité 2 sont couramment utilisés en pratique:

et : vaut vrai uniquement lorsque ses deux arguments valent vrai;

ou : vaut faux uniquement lorsque ses deux arguments valent faux;

$\Leftrightarrow$ (équivaut) : exprime l'égalité entre valeurs de vérité;

$\not\Leftrightarrow$: n'équivaut pas; aussi appelé "ou exclusif" car ($A \not\Leftrightarrow B$) $\Leftrightarrow$ ((A ou B) et non(A et B));

$\Rightarrow$ (implique): l'énoncé $A \Rightarrow B$ est vrai sauf quand A est vrai et B est faux; il exprime donc que, si A est vrai alors B est vrai, mais ne nous renseigne pas (étant toujours vrai) si A est faux.

Pour toutes valeurs des variables booléennes (remplaçables par des énoncés) A, B, C on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{non}(\mathrm{non}\,A)) &\Leftrightarrow A\\
(A \not\Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((\mathrm{non}\,A) \Leftrightarrow B)\\
(A \text{ ou } B) &\not\Leftrightarrow ((\mathrm{non}\,A) \text{ et } (\mathrm{non}\,B))\\
(A \text{ et } B) &\not\Leftrightarrow ((\mathrm{non}\,A) \text{ ou } (\mathrm{non}\,B))\\
(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\mathrm{non}\,A) \text{ ou } B)\\
(A \Rightarrow B) &\not\Leftrightarrow (A \text{ et } \mathrm{non}\,B)\\
(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))\\
(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\mathrm{non}\,B \Rightarrow \mathrm{non}\,A)\\
((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow C)) &\Rightarrow (A \Rightarrow C)\\
(A \text{ et } (B \text{ et } C)) &\Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ et } C)\\
(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) &\Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \Rightarrow C)\\
(A \Rightarrow (B \text{ et } C)) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ et } (A \Rightarrow C))
\end{aligned}$$

L'énoncé $(\mathrm{non}\,B \Rightarrow \mathrm{non}\,A)$ est le *contraposé* de $(A \Rightarrow B)$, tandis que $B \Rightarrow A$ en est la *réciproque*.

Lorsque $A \Rightarrow B$ on dit que A est une *condition suffisante* à B, et que B est une *condition nécessaire* à A. Ainsi, pour prouver une équivalence $A \Leftrightarrow B$, la méthode souvent employée consiste à prouver séparément chacune des deux implications, dont la première $(A \Rightarrow B)$ est dite *directe*, et la deuxième, $(B \Rightarrow A)$, est dite *réciproque*. On peut exprimer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ en disant que A est une condition nécessaire et suffisante à B. On écrira "ssi" comme abréviation de "si et seulement si", traduction de l'équivalence, servant à définir un nouveau prédicat par un énoncé.

On définit le connecteur ternaire de double implication $(A \Rightarrow B \Rightarrow C)$ comme abréviation de $((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow C))$, qui entraine $A \Rightarrow C$.

De même on a la chaîne d'équivalence, qui est une chaîne d'égalités entre valeurs de vérités: $(A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C)$ signifie $((A \Leftrightarrow B)$ et $(B \Leftrightarrow C))$, et implique que $A \Leftrightarrow C$.

Autres remarques

Les plus simples termes consistent en une seule occurence d'un symbole de constante ou de variable, dont ils tirent la valeur (et donc aussi la sorte). Un tel terme est dit *atomique*.

Toutes les autres formules se construisent ensuite successivement, par l'emploi d'autres symboles d'opérateurs au sens large ou de symboles liants, munis de listes adéquates de formules précédemment construites. Tant qu'il n'y a pas de symbole liant, la liste des symboles de variables disponibles reste la même partout.

Substitution entre termes égaux

Lorsqu'un énoncé d'égalité (ou d'équivalence) est connu comme vrai, ses deux principales sous-formules (ou plutôt leurs occurences) sont remplaçables l'une par l'autre à l'intérieur de toute autre formule sans en affecter la valeur. Par exemple si x appartient au domaine d'une fonction f (autrement dit $f(x)$ a un sens) et si $x = y$, alors $f(y)$ a aussi un sens et $f(x) = f(y)$. De même avec tout usage d'un symbole de structure.

On peut notamment créer une telle situation étant donné un terme t, tant que ses variables libres restent libres, en introduisant un nouveau symbole de variable libre z dit *défini par* t, i.e. muni de l'hypothèse $z = t$ (où au lieu de la lettre t figure le terme): alors z est interchangeable avec le terme et sert à l'abréger. De même à l'inverse, toute loi ou vérité générale, énoncée au moyen de variables libres, est utilisable en remplaçant toutes les occurences d'une variable libre par celles d'un même terme, du moment que la valeur de celui-ci est une valeur possible de la variable qu'elle remplace.

1.7. Structures définies, classes, structures partielles

Structures définies par des formules

Considérant une formule valide comme une manière de donner une valeur dépendant des variables libres disponibles, son comportement lorsqu'on fait varier certaines d'entre elles (on passe au point de vue où elles sont liées), s'apparente à une structure dont les arguments sont ces variables. De plus, quoique n'ayant pas la forme d'un seul symbole mais d'une formule, cette structure est inscrite dans le formalisme de la théorie, dans la mesure où elle peut être employée dans le même rôle que tout autre symbole de structure, par insertion dans d'autres formules par des processus adéquats.

Ainsi définirons-nous l'étendue de la notion de structure en théorie du modèle: ayant fixé une théorie avec son langage et son modèle interprétant chaque symbole par une structure, ce qu'on reconnaîtra comme étant les autres structures dans la théorie, seront celles qu'on peut obtenir comme définies par une formule. Voilà pour l'idée en première approche. Mais il reste quelques détails à préciser, notamment sur le formalisme délimitant de ce qu'on reconnaît comme formules.

Déjà, il faut distinguer entre une notion restreinte de *structure invariante*, où toutes les variables présentes dans la formule sont liées (prises comme arguments de la structure), et une notion plus large de *structure paramétrée* définie par une formule pouvant utiliser d'autres variables qui demeurent libres: la même formule définit des structures différentes suivant les valeurs de ces autres variables, qu'on appelle les *paramètres*.

Etant donnée une quelconque formule, on peut sans modifier la "signification profonde" de la théorie, introduire un nouveau symbole de structure désignant la structure invariante qu'elle définit (d'arguments les variables libres figurant dans la formule). Le nouveau symbole servira alors comme abréviation de la formule.

Une formule une fois réduite à un seul symbole ne présente plus apparemment de variable liée, même s'il y en avait initialement. Cela ne permet pas d'éliminer les variables liées de toutes les formules, car on ne peut résumer une formule à un symbole qu'en ayant formulé au moins une fois sa signification voulue au moyen de variables liées. La question de la présence ou l'absence de variable liée dans une formule, doit donc se moduler par celle de l'usage de symboles abrégeant leur éventuel usage sous-entendu.

Sauf mention du qualificatif "invariant", les noms de structure, prédicat ou opérateur, seront désormais endendus comme admettant les structures paramétrées. Il faut donc distinguer entre d'une part les symboles de structure qui appartiennent au langage de la théorie des ensembles, qui désignent des structures invariantes; et les autres structures qu'on peut toujours localement aussi représenter sous forme de symboles, mais sans que ces symboles ne soient admissibles comme symboles de la théorie des ensembles à proprement parler, les structures qu'ils désignent n'étant pas invariantes (mais il suffirait de lier leurs paramètres comme arguments supplémentaires pour qu'elles le deviennent).

Notion de classe

Introduisons d'abord les classes en théorie du modèle, indépendamment du fait que la théorie étudiée soit ou non une théorie des ensembles.

On définit une *classe* comme étant la même chose (le même méta-objet) qu'un prédicat (notion qu'on vient de délimiter comme étant ce qui peut être défini par un énoncé), mais réinterprété comme domaine: un prédicat unaire définit une simple classe (un méta-ensemble), domaine d'une variable, tandis qu'un prédicat de plus grande arité définit une classe de valeurs de systèmes de plusieurs variables (correspondant aux arguments du prédicat).

Un prédicat unaire $\mathcal{R}$ vu comme classe, sert de domaine à une variable x lorsque x est uniquement soumis à l'hypothèse $\mathcal{R}(x)$ (l'énoncé $\mathcal{R}(x)$ est tout ce qu'on sait sur x). On parle ainsi de la classe des objets x tels que $\mathcal{R}(x)$. Comme annoncé, $\mathcal{R}$ peut être paramétré, mais x n'en est pas un paramètre (cette notion de classe est assez générale pour qu'à peu près en toute circonstance d'usage d'une variable dans une théorie, son domaine soit une classe définie de cette façon).

Ainsi en théorie des ensembles, tout ensemble E est interprétable comme cas particulier de classe, à savoir la classe des objets x tels que $x \in E$ (ici $\mathcal{R}$ est défini par l'énoncé $x \in E$, où x est lié et E laissé en paramètre). Mais on verra que certaines classes unaires, dont celle définie par (vrai), ne correspondent à aucun ensemble. En résumé, les ensembles sont des cas particuliers de classes unaires, qui sont des cas particuliers de méta-ensembles d'objets.

Classes de validité en théorie des ensembles

Contrairement à ce qui a été présenté pour les théories génériques, bien des structures en théorie des ensembles ne seront que partiellement définies, n'ayant de sens que pour certaines combinaisons de valeurs de ses arguments de sortes adéquates, et non toutes.

Par exemple, l'évaluateur de fonction, noté par le terme $f(x)$, n'a de sens que lorsque $x \in \mathrm{Dom}\, f$. Cet énoncé $x \in \mathrm{Dom}\, f$ définit une classe, qui sera appelé la *classe de validité* de la formule $f(x)$. Ainsi, chaque structure (symbole ou formule) aura sa classe de validité, de même arité, formulable par un énoncé dépendant des mêmes variables. Il y a des règles qu'on pourrait formuler, qui de toute formule permettraient de construire l'énoncé de sa classe de validité. Ceci pourrait a priori compliquer les questions de validité des formules par des questions de démontrabilité (une formule étant rendue licite par la démonstration que les valeurs utilisées sont permises).

En pratique, on ne cherchera pas à expliciter de formalisme élevant la question de la validité des formules au rang de problème (même si celui-ci serait facilement résoluble). L'usage la théorie des ensembles exige un soin permanent à n'écrire et utiliser des formules que lorsqu'elles ont un sens sur les valeurs utilisées des variables. Or, on se contentera de n'employer que les formules dont on aura besoin dans des circonstances où leur validité sera évidente.

Remplacement des sortes par des classes

Nous avions d'abord annoncé la reconnaissance de 3 sortes d'objets en théorie des ensembles: les éléments, les ensembles et les fonctions. En pratique, les ensembles et les fonctions seront vues comme sous-sortes de celle des éléments: on aura une sorte générale de tous les objets, où chaque objet est un ensemble ou une fonction ou ni l'un ni l'autre (auquel cas c'est un élément pur) mais pas les deux à la fois. Le mot "objet" sera donc synonyme de la sorte "élément".

Une telle fusion entre sortes sera en effet nécessaire pour échapper à d'autres redivisions à l'infini (entre ensembles d'éléments, ensembles d'ensembles, etc. . .).

Il serait possible, en principe, de simuler une telle fusion à l'intérieur du cadre formel de séparation absolue entre sortes qui a été présenté pour les théories génériques, en formalisant chaque ensemble en deux objets: un de sorte ensemble et un de sorte élément; et de même pour les fonctions. L'identification entre les deux représentations d'un même objet serait accomplie par des opérateurs unaires de "banalisation", qui de chaque ensemble ou fonction donne l'élément qu'il est aussi.

Mais, de toute manière cela ne pourrait pas éliminer la nécessité de recourir à des classes de validité, forme plus générale de méta-ensemble que ce qu'étaient les sortes, pour les structures de la théorie des ensembles. Alors, autant en profiter pour éliminer complètement l'usage des sortes et les remplacer par des classes. Chacune des deux sortes "ensemble" et "fonction" sera donc désormais une classe figurée par des symboles de prédicats: Ens ="être un ensemble", App = "être une fonction". L'univers de tous les objets est lui-même la classe définie par le prédicat (vrai).

Ainsi, nous opterons pour une formalisation de la théorie des ensembles où il n'y aurait qu'une seule sorte d'objets, mais où les structures auront pour domaines des classes.

Traduction des structures ensemblistes en théorie générique

Dans la traduction des théories des ensembles en théories génériques, le remplacement des classes de validité par des sortes ou même tout l'univers comme domaines des structures, s'effectue paresseusement: il suffit de conserver les formules telles quelles, et d'en préserver les valeurs sur les classes de validité. Tout modèle de la théorie des ensembles peut se convertir en modèle de son expression comme théorie générique, en complétant par exemple par une constante les valeurs des structures hors de leur classe de validité. Ces ajouts de valeurs hors des classes de validité n'ont aucune importance. En effet, les formules qui étaient initialement valides, restent valides après traduction, et de mêmes valeurs qu'initialement; et c'est la seule chose qui nous intéresse.

Validité étendue

Par abus de langage on se permettra de considérer comme valide une formule comportant une sous-formule non-valide pour des valeurs données des variables, du fait que la valeur finale après traduction en théorie générique ne dépend pas de la valeur des parties non valides.

En pratique on n'exploitera cette astuce que dans deux cas très précis, et en fait semblables: les connecteurs "et" et $\Rightarrow$. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux prédicats, de classes de validité donnés respectivement par les prédicats $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$. On définira la classe de validité de ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) tout comme celle de $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ par l'énoncé ($\mathcal{A}'$ et $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}')$). On remarque que, bien que le "et" soit symétrique lorsqu'il est valide (($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$)), sa classe de validité ainsi définie ne l'est pas. On pourrait s'amuser à la symétriser mais on n'en aura pas besoin.

Les énoncés définissant les classes de validité de toutes les formules seront eux-mêmes toujours valides, et ceci demeure vrai en interprétant la question de la validité suivant la règle des cas ci-dessus. Cette même règle attribue aux deux énoncés "$\mathcal{A}$ et ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$)" et "($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) et $\mathcal{C}$", qu'on savait déjà équivalents, la même classe de validité ($\mathcal{A}'$ et $(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}'$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}'))))$.

Cela permet de regarder comme toujours valides des énoncés tels que ($x \in \mathrm{Dom}\, f$ et $f(x) = y$) ou que $(x \in \mathrm{Dom}\, f \Rightarrow f(x) = y)$ (qui suivant notre formalisation des sortes sous forme de classes, seraient à précéder par (f est une fonction et)). On peut voir cela comme un simple raccourci formel par rapport au fait de préciser d'abord qu'on s'intéresse uniquement au cas où $x \in \mathrm{Dom}\, f$, puis dans ce cadre, qu'on considère la formule valide $f(x) = y$.

Ainsi se définit une sous-classe d'une classe donnée: partant d'une classe d'énoncé $\mathcal{A}$, un énoncé $\mathcal{B}$ valide dedans y définit une sous-classe globalement présentable sous forme de l'énoncé ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$).

Finalement, dans le nouveau contexte où des énoncés peuvent n'être pas partout valides, la notion de classe sera définie comme réinterprétation des seuls prédicats qui soient partout valides. Les prédicats partout valides s'obtiennent par des énoncés valides, convenablement construits en précédant avec “et” chaque énoncé a priori souhaité, par celui (valide) de la classe où on veut l'interpréter, dans la totalité de laquelle l'énoncé souhaité est valide.

1.8. Variables liées en théorie des ensembles

Usage des variables liées dans les formules

Nous avions présenté la notion de variable comme transition entre le point de vue de l'intérieur, où la variable apparaît libre, symbolisée à la ressemblance d'une constante qui en donne la valeur; et celui de l'extérieur, où elle est liée, n'a plus de nom utilisable pour désigner sa valeur puisqu'elle a toutes ses valeurs, ses variations sont données et en ce sens achevées.

Les formules ont été présentées comme structurées en boîtes et sous-boîtes: chaque formule se comprend comme une boîte de forme donnée par le choix de son symbole principal, et contenant une liste d'autres boîtes qui sont d'autres formules (de manière finie jusqu'aux termes atomiques). Il ne reste qu'à introduire le dernier type de symboles, ceux liant une (ou plusieurs) variable(s). Ce sont en effet les boîtes délimitées par ces symboles, qui sépareront les points de vue de l'intérieur et de l'extérieur de la variable: cette variable se trouve comme variable libre à disposition de la sous-formule intérieure (attachée) au symbole liant, mais elle “n'existe plus” comme variable à l'extérieur de ce symbole, pour la formule qu'il forme vue comme interprétée globalement.

Lorsqu'une formule G est constituée d'une symbole liant un symbole de variable x sur une formule F, son interprétation consiste d'abord implicitement à utiliser en guise de valeur de F, non plus un objet mais la structure définie par F en liant x (et laissant libres les autres variables). Or, le problème est que, autant pour une théorie générique que pour une théorie des ensembles, cette structure n'est jamais elle-même un objet, ni même traduisible par un objet. Dans chaque circonstance particulière où G prend une valeur particulière, cette valeur n'exprimera pas toute la donnée de la structure définie par F, mais seulement une information extraite de celle-ci.

Une différence importante surgit néanmoins entre le cas des théories génériques et celui des théories des ensembles. Car pour lier une variable il faut lui donner un domaine.

En théorie générique, les domaines des variables sont des sortes (ou des classes), qui ne sont pas des objets, mais des méta-objets. Chaque symbole liant une variable présente deux données: le choix du symbole de variable à lier (avec son sorte), et un énoncé utilisant cette variable comme libre (qui définit le prédicat unaire traité par ce procédé).

En théorie des ensembles le domaine d'une variable liée est un ensemble, qui est un objet: ceci oblige à joindre la donnée de cet ensemble comme argument supplémentaire. Chaque symbole liant se présente donc avec 3 données: le symbole de variable à lier, son domaine (donné par un terme, souvent atomique, de valeur un ensemble), et la formule utilisant cette variable comme libre. Passons maintenant en revue les principaux symboles liants en théorie des ensembles.

Définitions de fonctions par des termes

Nous aurons un seul symbole liant une variable sur un terme, figuré par la succession de deux caractères $\ni\ \mapsto$, et appelé *définisseur de fonction.* Il articulera sa variable x, son domaine E et le terme t où peut figurer x, sous la forme

$$E \ni x \mapsto t$$

Cette notation ici figurative, ne devient correcte qu'en remplaçant la lettre t par le terme considéré, ou encore comme $E \ni x \mapsto K(x)$, notant K l'opérateur unaire défini par t de variable x, au moins valide dans E.

Sa valeur est l'*fonction de domaine E définie par t.* C'est l'objet traduction de l'opérateur K de classe de validité réduite à l'ensemble E, qui coïncide en valeur avec t pour chaque x dans E.

Par abus de langage on abrégera parfois $(E \ni x \mapsto t)$ en $(x \mapsto t)$ lorsque le domaine E peut être sous-entendu, étant déterminé par le contexte.

Comment introduire de nouvelles sortes

Cette formalisation des fonctions en théorie des ensembles, peut servir d'exemple de la présence, dans une théorie quelconque, d'une sorte plus ou moins quelconque d'objets décrits par leurs rôles (structures ou choses semblables), plus complexes que les éléments purs qu'ils sont en eux-mêmes par ailleurs. Une sorte d'objets complexes d'une théorie, consiste finalement en une classe d'objets et des outils permettant d'identifier chaque élément de cette classe au rôle qui lui est assigné.

Ici, le rôle d'une fonction consiste en un opérateur unaire, de domaine un ensemble (objet). Alors, la notion de fonction consiste en une classe d'objets “fonctions”, un outil (les deux opérateurs: Dom et évaluateur de fonction) traduisant ses éléments en leurs rôles, et un outil de traduction inverse: le définisseur de fonction, traduisant un tel opérateur en objet “fonction”.

Nous aurons besoin d'autres sortes d'objets en théorie des ensembles, après les ensembles et les fonctions, mais on pourra facilement faire jouer leurs rôles à des objets issus du seul formalisme de ces derniers. Se contenter de voir les nouveaux objets comme implicitement présents dans la théorie des ensembles initiale, permettra de bénéficier directement des outils précédents, et nous allègera de toute formalité de rajout extérieur, de distinction et de traduction entre objets jouant le même rôle.

Mais il pourra y avoir plusieurs manières de faire jouer le rôle de nouveaux objets par des anciens. On pourra alors les comparer et en choisir une pour sa commodité dans tel ou tel contexte.

Formalisation des opérations et curryfication

Les opérations ont été présentées comme une généralisation des fonctions à plusieurs arguments ayant chacun son domaine; elles désigneront des opérateurs de domaine défini par un ensemble sur chaque variable, indépendemment les unes des autres. Leur formalisation fera appel à des outils analogues à ce qu'on a présenté pour les fonctions.

Nous avions déjà figuré, pour chaque arité $n > 1$, l'*évaluateur d'opération n-aire*, opérateur d'arité $n+1$ donnant la valeur d'une opération f d'arité n pour des valeurs données des n arguments, par la notation $f(x_1, \cdots, x_n)$. De même, on aura un définisseur d'opération d'arité n: un symbole qui lie n variables sur un terme. Ainsi pour $n = 2$, celui liant sur un terme t les deux variables x et y de domaines respectifs E et F, s'écrira $(E \ni x, F \ni y \mapsto t)$.

Cela peut se reconstruire au moyen d'une classe de fonctions de la manière suivante.

Pour lier plusieurs variables, il suffit de réutiliser le définisseur de fonction (qui liait une seule variable sur un terme, pour former un nouveau terme), successivement sur chacune des variables à lier. Cette représentation des opérations au moyen de fonctions s'appelle *curryfication*:

$$f = (E \ni x, F \ni y \mapsto t) \simeq (E \ni x \mapsto (F \ni y \mapsto t)) = g$$
$$f(x, y) = g(x)(y)$$

Mais pour cela il faut choisir un ordre dans lequel les prendre, ce qui rompt la symétrie initiale entre variables. Il y a un autre petit défaut sans importance (sur la définition d'un domaine quand un autre est vide). Plus tard un autre outil (les n-uplets) permettra de résoudre ces problèmes.

On simplifiera $(E \ni x, E \ni y \mapsto t)$ en $(E \ni x, y \mapsto t)$.

Relations

On appelle *relation* un objet semblable à une opération mais à valeurs booléennes. Il désigne donc un prédicat de domaine donné par des ensembles, tout comme une opération désignait un opérateur. Cela se formalise comme les opérations, avec pour chaque arité un définisseur de relation liant des variables sur un énoncé, et un prédicat évaluateur de relation.

Cela peut se reconstruire de deux manières à partir des notions précédentes.

L'une consiste à choisir deux objets pour figurer le vrai et le faux. La traduction des valeurs booléennes en objets peut se faire par un opérateur à un argument booléen, ou par des procédures plus complexes. Ceci réduit les relations à des opérations particulières. Cette reconstruction sera celle implicitement employée de manière paresseuse, lorsqu'on notera les relations comme des opérations, et qu'on manipulera les valeurs booléennes comme des objets.

L'autre, ci-dessous, ne s'applique qu'aux relation unaires, ce à quoi peut se réduire le cas général tout comme les opérations se réduisent aux fonctions (au choix: par curryfication ou n-uplets). Etant donné un ensemble E, une *relation unaire sur E* est une relation unaire de domaine E.

Compréhension

Voici l'autre moyen de représenter les relations unaires A comme objets, à savoir comme ensembles: il s'agira d'utiliser le prédicat d'appartenance $x \in A$ en guise d'évaluateur $A(x)$.

Le principe est qu'une relation unaire A sur E désigne un prédicat unaire de domaine E; un tel prédicat se réinterprète comme la sous-classe de E définie par ($x \in E$ et $A(x)$) de variable x.

Cette sous-classe est un ensemble pour la raison suivante. La relation A divise E en deux parties, dont on retiendra celle des x tels que $A(x)$ est vrai. Autrement dit, on prend la variable x de domaine E, puis, du point de vue où x est libre, on postule $A(x)$ (on restreint la considération au cas où il est vrai), ce qui est formellement possible puisque le prédicat $A(x)$ est défini par un énoncé donné. Alors, vu de l'extérieur (point de vue accessible sachant lier x dans E), on a ce nouveau domaine pour x, des éléments de E où $A(x)$ est vrai, qui est donc un ensemble.

Donnons-lui une notation, en introduisant un symbole de la théorie des ensembles, liant une variable à un ensemble sur un énoncé, appelé *symbole de compréhension* et noté $\{\ \in\ \mid\ \}$.

Soit $\mathcal{R}$ un prédicat unaire (remplacer $\mathcal{R}(x)$ par un énoncé) au moins valide dans E. On note $\{x \in E|\mathcal{R}(x)\}$, et on lit *ensemble des x dans E tels que* $\mathcal{R}(x)$, l'ensemble tel que pour tout y,

$$y \in \{x \in E|\mathcal{R}(x)\} \Leftrightarrow (y \in E \text{ et } \mathcal{R}(y))$$

Cette construction diffère de celle des fonctions et des relations unaires telles qu'initialement conçues, par la disparition de l'opérateur Dom: une fonction f était uniquement valide sur son domaine qui était donné au départ et qui se retrouve comme $\operatorname{Dom} f$, tandis que l'évaluation par $\in$ d'une relation unaire vue sous forme d'ensemble, est valide partout, prolongé par faux hors du domaine initial dont la donnée est perdue. Cela n'entraînera pas d'inconvénient pratique, pour la même raison que l'extension des classes de validité à l'univers dans la traduction en théorie générique: le domaine sera généralement sous-entendu par le contexte.

Le définisseur de fonction et le symbole de compréhension sont deux exemples de formalisations de l'idée suivante que la théorie des ensembles a vocation à exprimer: dès qu'on y trouve un méta-objet qui se comporte comme un objet (une classe unaire qui se comporte comme un ensemble, une structure comme une fonction), à savoir qu'il est pareillement utilisable par des formules, alors c'est effectivement un objet dans l'univers, autrement dit on a un objet qui désigne **directement** ce méta-objet. Plus tard, d'autres symboles de structures et moyens formels seront ajoutés à la théorie des ensembles pour poursuivre cette même entreprise sur d'autres cas de figure.

1.9. Quantificateurs

Les deux symboles liants qu'on vient de voir (définisseur et compréhension), étaient spécifiques à la théorie des ensembles. Ce sont les symboles les plus puissants pour lier une variable à un ensemble, respectivement sur un terme et un énoncé, dans la mesure où ils enregistrent toute la donnée de la structure définie par la formule sur cet ensemble. Les seuls autres symboles liants qui seront utilisés s'exerceront sur des énoncés et seront à valeurs booléennes, et se nomment *quantificateurs*.

La même liste de quantificateurs, avec les mêmes propriétés essentielles, se décline en deux modes suivant qu'ils sont employés en théorie des ensembles ou dans une théorie générique. Dans le formalisme des théories génériques, un quantificateur Q est dit *ouvert* pour signifier qu'il s'applique à un prédicat $\mathcal{R}$ sous la forme $Qx, \mathcal{R}(x)$, utilisant une sorte comme domaine.

Mais en théorie des ensembles, il sera dit *borné* pour son usage d'un ensemble comme domaine; sa notation complète est alors $(Q\ \in\ ,\ )$ (où le caractère $\in$ ne doit pas être confondu avec le prédicat d'appartenance), ou sous forme remplie de données: $Qx \in E, P(x)$. Les quantificateurs bornés pourront être vus comme sous-produits du symbole de compréhension.

Une formule est dite *close* si elle ne comporte aucune variable libre.

Principaux quantificateurs

Le *quantificateur existentiel* se note $\exists$ et se lit "Il existe". Ainsi, $\exists x, \mathcal{R}(x)$ se lit "Il existe un objet x tel que $\mathcal{R}(x)$", et $\exists x \in E, \mathcal{R}(x)$ se lit *Il existe x dans E tel que* $\mathcal{R}(x)$.

Le *quantificateur universel* est noté $\forall$. L'énoncé noté $(\forall x \in E, \mathcal{R}(x))$ se lit "Pour tout x dans E, $\mathcal{R}(x)$" (ou "quel que soit $x\ldots$")

Ces deux quantificateurs s'échangent lorsqu'on échange les valeurs de vérité. Cela peut encore s'exprimer par les formules suivantes, aussi interprétables dans le cas borné en sous-entendant un même domaine, que dans le cas ouvert où $(x \mapsto \mathcal{R}(x))$ n'est qu'une désignation du prédicat $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
(\forall x, \mathcal{R}(x) &\Leftrightarrow (x \mapsto \mathcal{R}(x)) = (x \mapsto \text{vrai}) \\
(\exists x, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (x \mapsto \mathcal{R}(x)) \neq (x \mapsto \text{faux}) \\
(\forall x, \mathcal{R}(x)) &\not\Leftrightarrow (\exists x \in E, \operatorname{non} \mathcal{R}(x)) \\
(\exists x, \mathcal{R}(x)) &\not\Leftrightarrow (\forall x \in E, \operatorname{non} \mathcal{R}(x))
\end{aligned}$$

Pour les quantificateurs ouverts, il ne s'agit pas d'égalités reliant des objets mais seulement des méta-objets (des prédicats). On redéfinira plus loin ces quantificateurs ouverts autrement.

On remarque que $(\forall x,\text{vrai})$ est toujours vrai. Le quantificateur universel borné peut encore se définir ainsi:

$$(\forall x \in E, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow \{x \in E|\mathcal{R}(x)\} = E.$$

La classe de validité du définisseur ou du symbole de compréhension liant x à E sur une formule dont la classe de validité s'exprime par un énoncé V, s'écrit simplement $\forall x \in E, V$.

Statut des quantificateurs ouverts en théorie des ensembles

Nous avons dit que les quantificateurs ouverts ne sont pas admis en théorie des ensembles. Ce n'est en fait qu'à moitié vrai, précisons cela.

D'une part il y a les *énoncés ensemblistes*, qui ne comportent aucun quantificateur ouvert. En théorie des ensembles, les notions de structures et de classes seront sous-entendu restreintes à ces énoncés, et c'est aussi uniquement sur eux que s'exerceront les symboles liants de la théorie des ensembles (compréhension, quantificateurs bornés).

D'autre part on aura une notion plus générale d'énoncé admettant des quantificateurs ouverts, ce qu'on appellera *omni-énoncé*. Ils seront généralement formés d'une simple suite de quantificateurs ouverts (le plus souvent universels) finalement appliqués à des énoncés ensemblistes. Contrairement aux énoncés ensemblistes, ils n'ont pas pour vocation de prendre des valeurs booléennes, mais (sous forme d'omni-énoncés clos, et valides dans le cas d'une théorie avec classes de validité), d'exprimer des vérités. Ils seront introduits et utilisés pour cela suivant des règles qu'on précisera plus bas. Il s'agira d'abord des axiomes (choisis pour être supposés vrais), puis des théorèmes (prouvés vrais en conséquence des axiomes), différemment appelés ("proposition", "lemme", "corollaire") suivant leur degré d'importance: un théorème est plus important qu'une proposition; un lemme sert à démontrer un théorème; un corollaire vient en conséquence d'un théorème ou d'une proposition.

Le plus souvent, ce statut spécial se reflétera par le soin à n'écrire en formules que les énoncés ensemblistes, tandis que les quantificateurs ouverts ne seront exprimés qu'en langage courant dans la présentation extérieure. Formulation effectivement convenable de par la simplicité courante de l'usage des quantificateurs ouverts en comparaison des formules ensemblistes elles-mêmes.

C'est ainsi un omni-énoncé (avec quantificateurs universels ouverts) qui définissait le sens du symbole de compréhension. Nous allons justement l'utiliser pour montrer que la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble. C'est cela qui justifie la nécessité d'entreprendre toutes ces subtiles distinctions entre les notions de classes et d'ensembles, et entre quantificateurs ouverts et quantificateurs bornés:

Proposition (paradoxe de Russell). *Pour tout ensemble E il existe un ensemble F tel que $F \notin E$.*

Preuve. Soit $F = \{x \in E |\, \mathrm{Ens}(x) \text{ et } x \notin x\}$. On a l'équivalence $F \in F \Leftrightarrow (F \in E \text{ et } F \notin F)$, d'où il résulte que $F \notin F$ et $F \notin E$. □

Voici des règles de raisonnement pour toute théorie générique, qui en particulier permettront de traduire entre omni-énoncés et manipulations d'énoncés en théorie des ensembles.

Usage du quantificateur existentiel ouvert

S'il s'agissait de débattre, parmi les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ lequel est plus fondamental que l'autre, on pourrait plaider la cause de $\exists$ par plusieurs arguments.

Le premier est de considérer ce à quoi ils s'appliquent: un prédicat, ce que nous avions traduit en classe (celle des objets où l'énoncé est vrai, ceci reflétant notre souci de ne manipuler que des vérités). Chaque prédicat divise l'univers en deux classes complémentaires, échangées par la négation, et donc aussi par l'échange des deux quantificateurs. Or, seul $\exists$ exprime une propriété de la classe définie par le prédicat auquel il s'applique, à savoir celle de contenir au moins un objet, tandis que $\forall$ ne qualifie que ce qui ne se trouve pas dans sa classe.

Le deuxième, est de regarder ce que signifie la véracité de l'énoncé qui se présente par le quantificateur existentiel. En effet, cette véracité ne tient même pas à la forme de toute la classe de vérité du prédicat, mais uniquement à un objet présent dedans. Ainsi les règles d'emploi du quantificateur existentiel sur un prédicat unaire quelconque $\mathcal{R}$ sont les suivantes:

Règle de constat d'existence. *Si j'ai pu trouver un terme t et établir $\mathcal{R}(t)$, j'en conclus $\exists x, \mathcal{R}(x)$.*

Règle d'usage d'existence. *Si $\exists x, \mathcal{R}(x)$, alors je peux, sans restreindre la généralité, introduire une nouvelle variable libre z et postuler la véracité de $\mathcal{R}(z)$.*

Ces deux règles sont la réciproque l'une de l'autre, exprimant à quoi un énoncé existentiel est équivalent, sans y ajouter d'information abusive. En effet, constater une existence par un terme t puis l'utiliser comme variable z, ne fait que retraduire la possibilité d'introduire le symbole z comme abréviation du terme t.

Voyons maintenant l'exercice du quantificateur existentiel sur un prédicat dans une classe.

Soit une classe donnée par un prédicat unaire $\mathcal{A}$, où est valide un prédicat unaire $\mathcal{B}$. Alors le quantificateur existentiel sur $\mathcal{B}$ dans cette classe, s'exprime par $(\exists x, \mathcal{A}(x) \text{ et } \mathcal{B}(x))$. Cette expression semble reposer sur la notion de validité étendue vue précédemment; mais après traduction par les règles ci-dessus, cette extension de validité n'a plus à être évoquée, puisqu'on ne s'intéresse qu'à un cas où $\mathcal{A}(x)$ est vrai, et où donc $\mathcal{B}(x)$ est valide. La lecture de $(\exists x, \mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(x))$ comme quantificateur exercé sur $(\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(x))$ dans l'univers, ou comme exercé sur $\mathcal{B}(x)$ dans la classe définie par $\mathcal{A}$, ou comme propriété de la classe définie par $(\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(x))$ ne sont plus distinguables.

Enfin le quantificateur existentiel exercé dans une classe, permet de reformuler le plus directement cette classe. Soit $\mathcal{A}$ un prédicat unaire, et notons $\overline{Q}$ l'exercice du quantificateur existentiel dans la classe définie par $\mathcal{A}$. Autrement dit, $\overline{Q}$ est un quantificateur spécial, où la notation $(\overline{Q}x, \mathcal{B}(x))$, exercée sur tout prédicat unaire $\mathcal{B}$, désigne (équivaut à) l'énoncé $(\exists x, \mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(x))$. Alors on reconstitue $\mathcal{A}$ d'après $\overline{Q}$ conformément à

$$\mathcal{A}(x) \Leftrightarrow (\overline{Q}y, y = x)$$

qu'on peut immédiatement déduire des règles ci-dessus.

Quantificateur universel ouvert

Alors que le quantificateur existentiel se traduisait comme objet (variable ou terme), le quantificateur universel se présente comme loi ou énoncé. Son usage dans une classe diffère de celui dans l'univers, à moins de s'appuyer sur la règle de validité étendue. Dans l'univers, les règles sont celles-ci:

Règle de la preuve universelle. *Si, partant d'une variable libre x sans hypothèse j'ai pu prouver $\mathcal{R}(x)$, j'en conclus $\forall x, \mathcal{R}(x)$.*

Règle du cas particulier. *Si je sais que $\forall x, \mathcal{R}(x)$, et j'ai un terme t, alors $\mathcal{R}(t)$ est vrai.*

Leur usage successif revient à réécrire la démonstration initiale en remplaçant x par t.

On a notamment pour tous prédicats unaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, autant pour des quantificateurs ouverts que sur un ensemble fixe:

$$((\exists x, \mathcal{A}(x)) \text{ et } (\forall x, \mathcal{B}(x))) \Rightarrow \exists x, (\mathcal{A}(x) \text{ et } \mathcal{B}(x))$$
$$((\exists x, \mathcal{A}(x)) \text{ et } (\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x))) \Rightarrow \exists x, \mathcal{B}(x)$$
$$(\exists x, \mathcal{A}(x) \text{ et } \mathcal{B}(x)) \Rightarrow \exists x, \mathcal{A}(x)$$

Le premier de ces énoncés confirme qu'on ne peut avoir à la fois $(\exists x, \mathcal{A}(x))$ et $(\forall x, \text{non}\, \mathcal{A}(x))$. Bien sûr que, pour un quantificateur borné ou d'un point de vue méta où l'univers apparaît comme ensemble, où de tels énoncés peuvent être écrits et prennent des valeurs booléennes, ils sont la négation l'un de l'autre. Mais sinon, en tant qu'omni-énoncés qui n'apparaissent que comme vérités, a-t-on toujours l'un des deux vrai ? Ce sera discuté dans la partie 1 bis de commentaires philosophiques.

L'expression du quantificateur universel sur un prédicat $\mathcal{B}$ dans une classe de prédicat $\mathcal{A}$, se déduit du cas existentiel par double négation: $\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$. Mais l'usage des règles a besoin d'être adapté pour éviter les cas d'invalidité, de la manière suivante.

La règle de la preuve universelle devient: si (parti d'une variable x et de la seule hypothèse $\mathcal{A}(x)$, on a pu démontrer $\mathcal{B}(x)$) alors on conclut $\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$. Celle du cas particulier, consiste à déduire de cette formule et de $\mathcal{A}(t)$ pour un certain t, la formule $\mathcal{B}(t)$.

Cet énoncé $\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ peut être vu comme comparaison entre les deux prédicats unaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et a des conséquences intéressantes. En effet, cet ordre est préservé par les quantificateurs eux-mêmes: $(\forall x, \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (\forall x, \mathcal{B}(x))$, et de même $(\exists x, \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (\exists x, \mathcal{B}(x))$. Cela s'applique également dans une classe définie par un prédicat $\mathcal{C}$:

$$(\forall x, \mathcal{C}(x) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (\forall x, \mathcal{C}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x))$$
$$(\exists x, \mathcal{C}(x) \text{ et } A(x)) \Rightarrow (\exists x, \mathcal{C}(x) \text{ et } \mathcal{B}(x))$$

Inclusion entre classes

Mais on peut aussi renverser la lecture, en regardant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ comme définissant des classes. Lorsque $\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ on dit que la classe de $\mathcal{A}$ est incluse dans celle de $\mathcal{B}$. C'est alors une sous-classe, au sens où l'on avait défini, à savoir par l'énoncé $\mathcal{A}$ dans la classe de $\mathcal{B}$, car $\forall x, \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow (\mathcal{B}(x)$ et $\mathcal{A}(x))$. Une tel ordre entre classes entraîne les liens suivants entre quantificateurs sur un même prédicat $\mathcal{C}$ dedans:

$$(\exists x, \mathcal{A}(x) \text{ et } \mathcal{C}(x)) \Rightarrow (\exists x, \mathcal{B}(x) \text{ et } \mathcal{C}(x))$$
$$(\forall x, \mathcal{B}(x) \Rightarrow \mathcal{C}(x)) \Rightarrow (\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{C}(x)$$

1.10. Axiomes fondateurs de la théorie des ensembles

Axiomes préliminaires

$\forall x,$ non(Ens(x) et App(x))

$\forall x,$ App(x) $\Rightarrow$ Ens(Dom x)

Traduction des quantificateurs bornés

Soit un prédicat unaire $\mathcal{R}$ valide dans un ensemble E. Dans la traduction d'une théorie des ensembles en théorie générique, les quantificateurs bornés se traduisent ainsi:

$$(\exists x \in E, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow (\exists x, x \in E \text{ et } \mathcal{R}(x))$$
$$(\forall x \in E, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Rightarrow \mathcal{R}(x))$$

Le fait de reconnaître les quantificateurs bornés comme énoncés ensemblistes, est l'expression la plus fondamentale de la notion d'ensemble en théorie des ensembles. En effet, ils ne sont pas définissables par d'autres énoncés ensemblistes n'utilisant que le prédicat $\in$ (sans quantificateurs ouverts). Formellement, ce sont en effet les premiers symboles liants ensemblistes à introduire, car les autres vus précédemment doivent s'appuient dessus pour leur formalisation. Philosophiquement, le seul fait (donné par $\in$) de savoir classifier chaque objet donné comme appartenant ou non à une classe fixée, même si cette classe était un ensemble par ailleurs, ne suffit pas à donner accès à la perspective suivant laquelle cette classe est un ensemble, à savoir où tous ses éléments sont vus comme coexistants.

Par contre, le prédicat $\in$ est redéfinissable au moyen du quantificateur existentiel borné:

$$x \in E \Leftrightarrow (\exists y \in E, x = y).$$

Définition de l'inclusion. *On définit le prédicat binaire $\subset$ entre deux ensembles E et F, qu'on lit E est inclus dans F, ou E est une* partie *ou un* sous-ensemble *de F, ou que F englobe E, par*

$$E \subset F \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in F).$$

Si $E \subset F$ alors tout prédicat unaire $\mathcal{R}$ valide dans F est aussi valide dans E, et

$$(\forall x \in F, \mathcal{R}(x)) \Rightarrow (\forall x \in F, (x \in E \Rightarrow \mathcal{R}(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathcal{R}(x))$$
$$(\exists x \in E, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in F, (x \in E \text{ et } \mathcal{R}(x))) \Rightarrow (\exists x \in F, \mathcal{R}(x)).$$

On a toujours $E \subset E$. On définit les chaînes d'inclusions à l'image des chaînes d'équivalence:

$$(E \subset F \subset G) \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset G) \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \in G) \Rightarrow E \subset G.$$

Axiome d'extensionnalité. *Pour tous ensembles E et F, $(E \subset F \text{ et } F \subset E) \Rightarrow E = F$.*

Cet axiome (dont la réciproque est vraie, ce qui en fait une équivalence), traduit qu'il n'y a au plus qu'un ensemble correspondant à une classe donnée. Il peut être vu comme redéfinissant l'égalité entre ensembles, ou comme précisant qu'un ensemble n'est que la représentation d'une certaine classe. Notamment il ne range pas ses éléments dans un quelconque ordre.

En effet, $E \subset F$ et $F \subset E$ signifie que E et F ont les mêmes éléments $(\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F)$. Il en résulte pour tout prédicat $\mathcal{R}$ sur F que $(\forall x \in F, \mathcal{R}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathcal{R}(x))$, et de même pour $\exists$. Ainsi deux ensembles indistinguables par leurs rôles seront donc déclarés égaux.

Principe de génération des ensembles

Un grand nombre des opérateurs et axiomes de la théorie des ensembles vont s'obtenir par fonction du principe suivant:

Principe de génération des ensembles. *Toute classe dans laquelle les quantificateurs sont exprimables par des énoncés ensemblistes, est un ensemble.*

Commençons par expliquer le sens de ce principe, et les règles suivant lesquelles il permet de construire effectivement des opérateurs et axiomes de théorie des ensembles.

On suppose donnés: une classe définie par un énoncé ensembliste, ici figurée sous l'aspect d'un prédicat unaire $\mathcal{R}$; et un énoncé Q exprimant le $\forall$ sur cette classe. Précisément Q figure un énoncé du langage ensembliste enrichi d'un symbole supplémentaire de prédicat unaire indéterminé. On le notera plus complètement $Qx, \mathcal{A}(x)$ pour noter $\mathcal{A}$ le prédicat unaire utilisé, ou plus généralement pour le définir par $x \mapsto \mathcal{A}(x)$ (où "$\mathcal{A}(x)$" est remplaçable par un quelconque énoncé).

L'usage du principe de génération des ensembles requiert d'établir d'abord la propriété suivante reliant les énoncés $\mathcal{R}$ et Q pour tout prédicat unaire $\mathcal{A}$:

$$(Qx, \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \mathcal{R}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x))$$

ce qui équivaut au système des 3 conditions suivantes, où $(\overline{Q}x, \mathcal{A}(x)) \not\Leftrightarrow (Qx, \text{non}\, \mathcal{A}(x))$:
1) $\forall x, (\mathcal{R}(x) \Leftrightarrow \overline{Q}y, x = y)$ (il suffit en fait que $\forall x, \mathcal{R}(x) \Rightarrow \overline{Q}y, x = y$)
2) $Qx, \mathcal{R}(x)$
3) Pour tous prédicats unaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tels que $\forall x, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ on a $(Qx, \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (Qx, \mathcal{B}(x))$.

Nous avons déjà montré que ces 3 propriétés sont conséquences de l'hypothèse initiale. Montrons que réciproquement ces trois propriétés entraînent la première. Celle-ci étant une équivalence, se compose de deux implications, réciproque l'une de l'autre, qui seront vérifiées séparément:
a) $(\forall x, \mathcal{R}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x)) \Rightarrow Qx, \mathcal{A}(x)$
b) $(\exists x, \mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{A}(x)) \Rightarrow \overline{Q}x, \mathcal{A}(x)$.

On voit immédiatement que 2) et 3) impliquent a). Par ailleurs, pour vérifier b), partant de $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{A}(x)$, le 1) donne $\overline{Q}y, x = y$, or $\forall y, x = y \Rightarrow \mathcal{A}(y)$ ce dont on déduit par 3) que $\overline{Q}y, \mathcal{A}(y)$. □

En pratique, étant donné un énoncé Q, la propriété 3) sera souvent évidente du fait qu'il ne comportera ni de négation ni d'équivalence ni d'occurence de $\mathcal{A}$ à gauche d'un symbole d'implication. Il ne restera plus qu'à vérifier 1) et 2).

Une fois ces propriétés établies pour des énoncés $\mathcal{R}$ et Q donnés, on peut alors introduire un nouveau symbole d'opérateur accompagné des axiomes adéquats. Il aura pour arguments les paramètres de $\mathcal{R}$ et Q. Le notant ici sous l'aspect d'un symbole de constante X désignant un ensemble (laissant ses arguments libres et sous-entendus), il sera muni des axiomes suivants (à précéder de $\forall$ ouverts dans la classe de validité) qui traduisent que $\forall x, x \in X \Leftrightarrow \mathcal{R}(x)$ et donc que $(Qx, \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X, \mathcal{R}(x))$:

$$\forall x \in X, \mathcal{A}(x)$$
$$Qx,\, x \in X$$

Voici des exemples de tels symboles d'opérateurs:

X	$\mathcal{R}(x)$	$Qx, \mathcal{A}(x)$	$\overline{Q}x, \mathcal{A}(x)$
$\emptyset$	faux	vrai	faux
$\{y\}$	$x = y$	$\mathcal{A}(y)$	$\mathcal{A}(y)$
$\{y, z\}$	$x = y$ ou $x = z$	$\mathcal{A}(y)$ et $\mathcal{A}(z)$	$\mathcal{A}(y)$ ou $\mathcal{A}(z)$
$\bigcup E$	$\exists y \in E, x \in y$	$\forall y \in E, \forall x \in y, \mathcal{A}(x)$	$\exists y \in E, \exists x \in y, \mathcal{A}(x)$
$E \cap F$	$x \in E$ et $x \in F$	$\forall x \in E, x \in F \Rightarrow \mathcal{A}(x)$	$\exists x \in E, x \in F$ et $\mathcal{A}(x)$
$\{x \in E \vert \mathcal{B}(x)\}$	$x \in E$ et $\mathcal{B}(x)$	$\forall x \in E, \mathcal{B}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x)$	$\exists x \in E, \mathcal{B}(x)$ et $\mathcal{A}(x)$
$\operatorname{Im} f$	$\exists y \in \operatorname{Dom} f, f(y) = x$	$\forall x \in \operatorname{Dom} f, \mathcal{A}(f(x))$	$\exists x \in \operatorname{Dom} f, \mathcal{A}(f(x))$

Les classes de validité des symboles non partout valides se définissent ainsi:

$\bigcup E$	$\operatorname{Ens}(E)$ et $\forall x \in E, \operatorname{Ens}(x)$	
$E \cap F$	$\operatorname{Ens}(E)$ et $\operatorname{Ens}(F)$	
$\{x \in E \vert \mathcal{B}(x)\}$	$\forall x \in E, \mathcal{B}'(x)$	où $\mathcal{B}'$ exprime la classe de validité de $\mathcal{B}$
$\operatorname{Im} f$	$\operatorname{App}(f)$	

L'opérateur unaire $\bigcup$ ci-dessus est le symbole d'union, et les axiomes associés constituent l'*axiome de la réunion*. En particulier on note $E \cup F = \bigcup\{E, F\}$, de sorte que $x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E$ ou $x \in F)$, puis $(\forall x \in E \cup F, \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E, \mathcal{A}(x))$ et $(\forall x \in F, \mathcal{A}(x)))$, d'où $E \subset E \cup F$ et $F \subset E \cup F$.

Le symbole de compréhension apparaît comme cas particulier de ce formalisme. Précisément, chacun de ses usages sur un énoncé spécifique s'exprime par un opérateur spécifique. La caractérisation de $X = \{x \in E|\mathcal{B}(x)\}$ qui n'avait été écrite que comme classe (donc avec un $\forall$ ouvert implicite), se réécrit ici par $(\forall x \in X, x \in E$ et $\mathcal{B}(x))$ et $(\forall x \in E, \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in X)$, ce qu'on peut reformuler en $(X \subset E$ et $\forall x \in E, x \in X \Leftrightarrow \mathcal{B}(x))$. L'intersection s'obtient par $E \cap F = \{x \in E|x \in F\}$.

On a $E \cap F = F \cap E \subset E$, ainsi que $(E = E \cup F \Leftrightarrow F \subset E \Leftrightarrow F = E \cap F)$.

S'il ne s'agissait pas de nommer tous les ensembles construits par le principe de génération des ensembles mais seulement de postuler leur existence et de les rendre exprimables, on pourrait postuler $Qx, x \in X$ dans tous les cas mais le $\forall \in X, \mathcal{R}(x)$ seulement pour les opérateurs de compréhension, car le X voulu est exprimable à partir du mauvais X sous la forme $\{x \in X|\mathcal{R}(x)\}$.

La constante $\emptyset$ est appelée *ensemble vide*, et est le seul ensemble n'ayant aucun élément. C'est le premier symbole de constante dont nous disposons, garantissant qu'il existe au moins un ensemble dans l'univers. Pour tout ensemble E on a $\emptyset \subset E$. L'axiome d'extensionnalité en déduit $(E \subset \emptyset \Leftrightarrow E = \emptyset)$, autrement dit $(E = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in E, \text{faux})$, et donc $(E \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in E, \text{vrai})$.

L'ensemble vide s'obtient ainsi à partir de n'importe quel ensemble E par $\emptyset = \{x \in E|\text{faux}\}$.

On appelle *singleton* tout ensemble à un seul élément, donc de la forme $\{a\}$.

L'ensemble $\{a, b\}$ est une *paire* (ensemble à deux éléments) lorsque $a \neq b$. Par contre $\{a, a\} = \{a\}$. Dans tous les cas, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Enfin, pour toute fonction f, on note $\operatorname{Im} f$ et on appelle *ensemble image* de f, l'ensemble des valeurs de $f(x)$ pour tous les $x \in E$. C'est le domaine de $f(x)$ vu comme objet variable du point de vue où x est variable de domaine E. On a $(\operatorname{Dom} f = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \emptyset)$.

On appelle *ensemble d'arrivée de* f tout ensemble F tel que $\operatorname{Im} f \subset F$ (ce qu'on peut écrire $\forall x \in \operatorname{Dom} f, f(x) \in F$). Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle *fonction de* E *dans* F toute fonction f telle que $(\operatorname{Dom} f = E)$ et $(\operatorname{Im} f \subset F)$.

Finalement, le $\exists$ borné peut se traduire de deux manières:

$$(\exists x \in E, \mathcal{B}(x)) \Leftrightarrow \{x \in E|\mathcal{B}(x)\} \neq \emptyset \Leftrightarrow (\text{vrai} \in \operatorname{Im}(E \ni x \mapsto \mathcal{B}(x))).$$

Traduction du définisseur

Lors de la traduction de la théorie des ensembles dans le formalisme d'une théorie générique, le définisseur doit subir le même sort que celui du symbole de compréhension que nous venons de voir: devenir une infinité de symboles d'opérateurs différents, un pour chaque terme qu'on veut employer comme définition. De même que toute formule, quelle que soit sa forme, peut toujours se condenser en un simple symbole de structure; sauf qu'ici, faute de pouvoir l'écrire en longueur, son condensé en un seul symbole d'opérateur représentant la totalité du terme $(E \ni x \mapsto t)$, est tout ce qu'il en restera. Chacun de ces symboles d'opérateurs aura pour arguments l'ensemble E et toutes les variables libres présentes par ailleurs.

En fait il n'est pas nécessaire d'introduire autant de symboles de traduction du définisseur que de contenus: non seulement E peut rester simple variable (argument du nouveau symbole, qui pourra être donné par un terme dans son usage), mais il suffit de le faire pour certains des termes t qu'on peut écrire (encore une infinité), les autres cas étant traduisibles par des termes utilisant ces derniers.

Les termes t qu'il suffit de prendre ainsi pour engendrer tous les autres, sont ceux où toute sous-formule ne contenant pas d'occurence de x est un symbole de variable libre, et où chaque symbole de variable libre (autre que x) est utilisé une unique fois.

Un tel opérateur formalisant une définition donnée devient lui-même à son tour utilisable dans les termes qui serviront à constituer les définitions suivantes.

Il ne reste plus qu'à exprimer en axiomes le sens de tous ces opérateurs. Il suffit de poser pour chaque symbole de définition par un terme t (à remplacer par son expression), l'axiome suivant: pour toutes valeurs des paramètres et tout ensemble E où t est valide, et pour toute fonction f,

$$f = (E \ni x \mapsto t) \Leftrightarrow (\operatorname{Dom} f = E \text{ et } (\forall x \in E, f(x) = t))$$

La variable f peut être éliminée en la remplaçant par sa valeur pour exprimer l'implication de gauche à droite dans l'énoncé ci-dessus; mais elle est nécessaire pour la réciproque. Sauf que celle-ci est traduisible en un seul axiome général indépendant du choix de t, analogue pour les fonctions de ce qu'était l'axiome d'extensionalité pour les ensembles:

Axiome d'égalité des fonctions. *Pour toutes fonctions* f *et* g, *on a*

$$(\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g \text{ et } \forall x \in \operatorname{Dom} f, f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g.$$

En particulier, il existe une unique fonction de domaine $\emptyset$, appelée l'*fonction vide*.

Plus tard, on introduira d'autres structures et axiomes en théorie des ensembles. Certains, dont ceux résultant encore du principe de génération des ensembles qu'on vient de voir, seront acceptés comme nécessaires. D'autres pourront être vus comme optionnels, ce qui constitue une diversité de théories des ensembles envisageables.