Chap. 9 :

Topologie sur les ordinaux
L'ordinal ω_1
Les ordinaux ω_α

1 Topologie sur les ordinaux

1.1 La topologie de l'ordre

Définition 1 : *Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné.*
On appelle topologie de l'ordre sur X la plus petite des topologies qui contienne les intervalles ouverts $]a, b[= \{x \in X : a < x < b\}$
où $<$ signifie $\leq$ mais $\neq$.

Exemple 1 : *La topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie de l'ordre.*

Proposition 1 : *Soit $U \subset X$*
U est ouvert ssi $\forall x \in U, \exists (a, b) \in X^2,\ a < x < b,\ ]a, b[\subset U$

Démonstration : U est ouvert ssi U est voisinage de chacun de ses points.

Point d'accumulation :

Définition 2 : $A \subset X$, $x \in X$
x est point d'accumulation de A ssi
$\forall (a, b) \in X^2, a < x < b \Rightarrow]a, b[$ *contient au moins un point de A autre que x.*

[Tout ouvert contenant x contient en fait une infinité d'éléments de A]

Remarque 1 : *Si on dit «point d'accumulation» sans préciser, cela signifie que x est point d'accu de X (cas particulier où $A = X$).*

Exemple 2 : *ω est point d'accu de tout ordinal $\alpha > \omega$*

1.2 Cas particulier des ordinaux

α ordinal.
α est bien ordonné, donc en particulier totalement ordonné, par la relation $\leq$
$(x \leq y \Longleftrightarrow x \in y$ ou $x = y)$

Théorème 1 : *L'ordinal ω n'a pas de point d'accumulation.*
C'est le seul ordinal infini qui possède cette propriété.

Démonstration : Trivial.

Théorème 2 *: (1) Tout ordinal successeur est compact.*
(2) Tout ordinal limite est localement compact.

Démonstration : (1) par récurrence transfinie
$\rightarrow$ 0 est compact.
$\rightarrow$ Hypothèse de récurrence : $\forall \xi < \beta$, ξ successeur $\Rightarrow \xi$ compact.
Comme β successeur, $\beta = [0, \beta - 1]$
Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de β
$\exists i_0 \in I, \beta - 1 \in U_{i_0}$
U_{i_0} contient un ordinal successeur $\gamma \leq \beta - 1$

$$\bigcup_{i \in I - \{i_0\}} U_i \text{ recouvre } \gamma$$

$$HR \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} U_i \supset \gamma$$

$$\text{donc } \bigcup_{i=1}^{n} U_i \ \cup \ U_{i_0} \supset \beta, \text{ CQFD.}$$

(2) Si β limite, $\beta + 1 = [0, \beta] = \beta \cup \{\beta\}$ est successeur, donc compact, et donc β est localement compact.

Remarque 2 *: $\beta + 1 = [0, \beta]$ est alors le compactifié d'Alexandrov de $\beta = [0, \beta[$*

2 La hiérarchie des bons ordres sur ω–L'ordinal ω_1

On a vu au Chap. 8 quelques exemples de bons ordres sur ω, de type d'ordre respectif ω, $\omega + 3$, $\omega + \omega$, ω^2, etc.

Plus généralement,on a le théorème suivant.

Théorème 3 *: pour tout ordinal dénombrable ξ, il existe un bon ordre $\leq$ sur ω tel que*
Type $\langle \omega, \leq \rangle = \xi$

Démonstration : Comme ξ est dénombrable, il existe une bijection $\varphi : \xi \rightarrow \omega$
Définissons sur ω la relation $\leq$ par
$n \leq p \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(n) \leq \varphi^{-1}(p)$
Il est clair que $\leq$ est un bon ordre sur ω et que φ est un isomorphisme d'ensembles bien ordonnés de $\langle \xi, \in \rangle$ sur $\langle \omega, \leq \rangle$.
Donc, Type $\langle \omega, \leq \rangle = \xi$, CQFD.

Une conséquence immédiate du théorème 3 est la possibilité de définir l'ordinal ω_1.

Définition 3 *: Soit $W = \{R \in \mathcal{P}(\omega \times \omega) : \ R \text{ est un bon ordre sur } \omega\}$*
et soit $S = \{Type\, \langle \omega, R \rangle : R \in W\}$
[S existe d'après le schéma de remplacement][1].
On pose $\omega_1 = Sup S = \bigcup S$

Théorème 4 *: ω_1 est un ordinal non dénombrable, et c'est le plus petit des ordinaux non dénombrables.*

[1]Pour être vraiment sûr qu'on a tout compris,il pourrait être intéressant de rédiger proprement la justification.En fait,c'est à cause de ce genre de théorème qu'on a réellement besoin du schéma de remplacement,car sans lui on ne saurait pas faire grand-chose de cette mine d'or que représentent les ordinaux.

Démonstration : On va montrer en fait que $\omega_1 \notin S$

Si $\omega_1 \in S$, il existe une bijection $\varphi : \omega_1 \to \omega$

Soit $\psi : \omega_1 + 1 \to \omega$ ainsi définie :

$\psi(0) = \varphi(1)$

$\psi(1) = \varphi(2)$

....

$\psi(n) = \varphi(n+1)$

....

$\psi(\omega) = \varphi(\omega+1)$

....

$\forall \xi < \omega_1, \psi(\xi) = \varphi(\xi+1)$

$\psi(\omega_1) = \varphi(0)$

Il est alors clair que ψ est une bijection de $\omega_1 + 1$ sur ω,

donc $\omega_1 + 1 \in S$, ce qui est absurde car $\omega_1 = SupS$

Donc, ω_1 n'est pas dénombrable et, comme il contient tous les ordinaux dénombrables, c'est le plus petit ordinal non dénombrable.

3 Généralisation

Définition 4 *: Soit α un ordinal quelconque.*

Soit $W = \{R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) : \ R \text{ est un bon ordre sur } \alpha\}$

et soit $S = \{Type\,\langle \alpha, R\rangle : R \in W\}$

On pose $\alpha^+ = SupS$

Théorème 5 *: α^+ est un ordinal plus grand que α, qui n'est pas en bijection avec α, et c'est le plus petit des ordinaux vérifiant cette propriété.*

Démonstration : comme ci-dessus.

On va ainsi définir, par récurrence transfinie, toute une hiérarchie d'ordinaux «particuliers», indexée par les ordinaux eux-mêmes.

Définition 5 *: On pose*

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega \\ \omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+ \\ \omega_\beta = Sup\,\{\omega_\xi : \xi < \beta\} \ \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

On verra dans le Chap. suivant que ces ordinaux «particuliers» constituent en fait la hiérarchie de tous les cardinaux transfinis.