Chap. 8 :

Compléments sur l'arithmétique des ordinaux

1 Le théorème de récursion

Théorème 1 *: Soit S un ensemble*
Soit $\varphi : S \to S$ une fonction
Soit $a \in S$
alors il existe une unique application $f : \mathbb{N} \to S$ telle que
(1) $f(0) = a$
(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(S(n)) = \varphi(f(n))$

Remarque 1 *: Le mot «application» $f : \mathbb{N} \to S$ signifie que f est une fonction,*
dom$(f) = \mathbb{N}$ et $\mathrm{Im}(f) \subset S$

Remarque 2 *: Les gens «normaux» écrivent : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*
(1) $u_0 = a$
(2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$[1].

Démonstration du théorème : On considère le produit cartésien $\mathbb{N}\times S$
Soit Γ l'ensemble des sous-ensembles U de $\mathbb{N} \times S$ ayant les 2 propriétés suivantes :
(i) $(0, a) \in U$
(ii) Si $(n, b) \in U$, alors $(S(n), \varphi(b)) \in U$
Comme $\mathbb{N} \times S$ satisfait trivialement ces 2 propriétés, il est clair que $\Gamma \neq \emptyset$
Soit f l'intersection de tous les ensembles $U \in \Gamma$
Il s'agit de démontrer que f est la fonction de $\mathbb{N}$ dans S cherchée.

$\to$ Montrons d'abord que pour tout entier n, il existe $b \in S$ tel que $(n, b) \in f$
Par récurrence sur n :
$f(0) = a$, donc $(0, a) \in f$
Hypothèse de récurrence : $\exists b \in S, (n, b) \in f$
Comme f est l'intersection de tous les $U \in \Gamma$, on a donc $(S(n), \varphi(b)) \in f$
donc $\exists b' \in S, (S(n), b') \in f$, CQFD.

Pour prouver que f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans S, il reste à démontrer que, si $(n, b) \in f$ et $(n, b') \in f$, alors $b = b'$.
Ceci est équivalent à démontrer que l'ensemble T de tous les entiers naturels tels que $[(n, b) \in f$ et $(n, b') \in$
est l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier.
Nous allons le démontrer par récurrence sur n.
*$0 \in T$
Sinon, $\exists a' \in S$ tel que $(0, a') \in f$ avec $a' \neq a$
Soit alors $f' = f - \{(0, a')\}$

[1] La raison profonde pour laquelle nous sommes obligés de nous considérer comme des gens «anormaux» est que,depuis le début de ce séminaire,nous faisons de la théorie des ensembles pure et dure,et non plus des mathématiques traditionnelles.

Il est clair que f' satisfait les conditions (i) et (ii), donc $f' \supset f$
Mais, comme $f' = f - \{(0, a')\}$, on a aussi f' inclus strictement dans f, Contradiction.
d'où $0 \in T$.

**Supposons qu'il existe un entier r tel que $r \in T$ et $S(r) \notin T$
Soit $(r, b) \in f$
donc $(S(r), \varphi(b)) \in f$ et, comme $S(r) \notin T, \exists c \neq \varphi(b)$ tel que $(S(r), c) \in f$
posons alors $f' = f - \{(S(r), c)\}$
Comme $S(r) \neq 0$ et que f contient (0,a), alors f' contient (0,a).
Le même argument prouve que, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq r$ et $(n, d) \in f'$, alors $(S(n), \varphi(d)) \in f'$
Maintenant, si $(r, b') \in f'$, alors $b' = b$, *et* donc $(S(r), \varphi(b)) \in f'$, car $(S(r), \varphi(b))$ n'a pas été «enlevé» en fabriquant f' à partir de f.
Par conséquent, f' vérifie les propriétés (i) et (ii), donc $f' \in \Gamma$
On a à nouveau la contradiction $f' \supset f$ et f' inclus strictement dans f.

On a donc prouvé que si $r \in T$, alors $S(r) \in T$
d'où $T = \mathbb{N}$, ce qui prouve l'existence d'une fonction f satisfaisant aux conditions (i) et (ii) du théorème.

Unicité :
Soit g n'importe quelle application satisfaisant ces conditions.
On a $g \in \Gamma$, donc $g \supset f$
Mais, pour 2 applications f et g, $g \supset f$ implique $g = f$ d'après la définition d'une application.
Donc f est unique.

Remarque 3 *: Le théorème de récursion dit en clair qu'il est licite de construire des suites définies par un procédé de récurrence (connaissance du terme initial et d'une relation permettant de passer d'un terme au suivant), chose que nous avions supposée implicitement vraie dans le Chap 5, par exemple pour définir l'addition et la multiplication dans* $\mathbb{N}$.

Notre ambition dans cette deuxième partie est de généraliser ce mode de raisonnement à des ordinaux plus complexes que les entiers naturels.Nous allons commencer par énoncer un théorème fondamental, qui est le pendant ordinal naturel au principe de récurrence.

2 Le principe de récurrence transfinie

Théorème 2 *: Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble bien ordonné.*
Soit 0 le plus petit élément de E.
Soit $X \subset E$ *vérifiant les 2 propriétés suivantes :*
(1) $0 \in X$
(2) Si $\forall \alpha < x, \alpha \in X$, *alors* $x \in X$
alors $X = E$

Démonstration : Si $X \neq E$, posons $Y = E - X$
$Y \neq \emptyset$, donc Y a un plus petit élément, soit y.
Or, $\forall \alpha < y, \alpha \notin Y$, donc $\alpha \in X$
(2) $\Rightarrow y \in X$, contradiction car $y \in Y$

Remarque 4 *: Le théorème est vrai en particulier si E est un ordinal.*
$[(X \subset E) \wedge (0 \in X) \wedge ((\forall \alpha \in E, \alpha < x \Rightarrow \alpha \in X) \Rightarrow x \in X)] \Rightarrow (X = E)$

Aspect pratique : Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément α d'un ordinal E, il suffit de démontrer :
(1) $P(0)$ vraie.
(2) $P(\alpha)$ vraie $\Rightarrow P((S(\alpha))$ vraie.
(3) Si β ordinal limite et si $\forall\alpha < \beta, P(\alpha)$ vraie, alors $P(\beta)$ vraie.

Dans le §I), on s'est servi du principe de récurrence pour démontrer qu'on a le droit de définir une fonction sur $\mathbb{N}$ *par «récurrence», connaissant le premier terme et le «processus» qui permet de passer de* $f(n)$ *à* $f(S(n))$.

La question qui se pose maintenant est de savoir si on peut généraliser ce phénomène à des procédés récurrents sur les ordinaux. Le fait que la classe des ordinaux ne constitue pas un ensemble en fait une question «philosophique».

On admettra qu'il est possible de définir des fonctions par «récurrence transfinie» sur les ordinaux en définissant :
(1) $f(0)$
(2) $f(S(\alpha))$ en fonction de $f(\alpha)$
(3) $f(\beta)$ en fonction de tous les $f(\alpha)$ pour $\alpha < \beta$ dans le cas où β est un ordinal limite.

Pour plus de détails concernant cet aspect «métamathématique» du problème, voir par exemple Kunen : «Set theory».

3 Addition des ordinaux

Définition 1 *: α ordinal fixé.*
On définit $\alpha + \beta$ par récurrence transfinie sur β de la façon suivante :
(1) $\alpha + 0 = \alpha$
(2) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$
(3) $\alpha + \beta = Sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$ si β ordinal limite

Proposition 1 *: La restriction de l'addition ainsi définie sur les ordinaux à l'ordinal ω coïncide avec l'addition «ordinaire» sur* $\mathbb{N}$.

Nous l'avons vérifié expérimentalement dans le Chap 5.

Quelques exemples moins «triviaux» : $\omega + 1 = \omega + S(0) = S(\omega + 0) = S(\omega) > \omega$
$1 + \omega = Sup\{1 + \xi : \xi < \omega\} = Sup\{entiers\} = \omega$
Z : L'addition dans ON n'est pas commutative.

Remarque 5 *: En revanche,la restriction de l'addition à l'ordinal ω* *EST* *commutative, ce qui est pour le moins «rassurant».*

De même, $\omega + 2 = \omega + S(1) = S(\omega + 1) > \omega + 1$
et $2 + \omega = 1 + \omega = \omega$

Aspect «philosophique» : Si on suit ω heures de cours sur les ordinaux, suivies d'une pause et de 5 heures de cours supplémentaires, on aura suivi en tout $(\omega + 5)$ heures de cours, et on se rendra bien compte de la différence.

En revanche, si on suit d'abord 5 heures de cours, puis ω heures, on ne se souvient plus à la fin des 5 heures du début, et on est juste capable de dire, si on en a encore le souffle, qu'on a suivi «une infinité» d'heures de cours.

Continuons la série des exemples.
$\omega + \omega = Sup\{\omega + \xi : \xi < \omega\} = Sup\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\}$

Dessin : prendre 2 copies de ω, et les recoller bout à bout.

On va voir maintenant quelques exemples de bons ordres sur ω, et les types d'ordre de ces ensembles bien ordonnés.

Convention générale : Si on écrit ω en extension, on dira que $n < p$ ssi n est écrit avant p dans la liste.

Exemple 1 *:* $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$
Type $\langle \omega, \leq \rangle = \omega$

Exemple 2 *:* $\omega = \{12, 8, 3, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, ...\}$
Type $\langle \omega, \leq \rangle = \omega$

Exemple 3 *:* $\omega = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, ...\} \cup \{12, 8, 3\}$
Type $\langle \omega, \leq \rangle = \omega + 3$

Exemple 4 *:* $\omega = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\} \cup \{1, 3, 5, 7, ...\}$
Type $\langle \omega, \leq \rangle = \omega + \omega$

Exemple 5 *:* $\omega = \{0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...\} \cup \{2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ...\}$
$\cup \{5, 8, 12, 17, 23, 30, ...\} \cup ...$
Type $\langle \omega, \leq \rangle = \omega + \omega + ... + \omega + ...$*(*$\omega$ *fois)*$= \omega^2$

On verra dans le Chap 9 de plus amples détails concernant les bons ordres sur ω et leurs types d'ordre.

4 Multiplication des ordinaux

Définition 2 *:* α *ordinal fixé.*
On définit $\alpha.\beta$ *par récurrence transfinie sur* β *:*
(1) $\alpha.0 = 0$
(2) $\alpha.S(\beta) = \alpha.\beta + \alpha$
(3) Si β *ordinal limite,*$\alpha.\beta = Sup\{\alpha.\xi : \xi < \beta\}$

Exemple 6 *:* $4 \times 7 = 28$*...et, d'une façon générale, la restriction à l'ordinal* ω *de la multiplication définie ci-dessus coïncide avec la multiplication «ordinaire» dans* $\mathbb{N}$.

Exemple 7 *:* $2 \times \omega = Sup\{2 \times n : n < \omega\} = \omega$
$\omega \times 2 = \omega \times S(1) = \omega \times 1 + \omega = \omega + \omega$

La multiplication dans ON n'est pas commutative.
Z : Par abus de langage, on écrit souvent 2ω, au lieu de $\omega \times 2$, pour désigner l'ordinal $\omega + \omega$.

5 Exponentiation des ordinaux

Définition 3 *: α ordinal fixé.*
On définit α^β par récurrence transfinie sur β :
(1) $\alpha^0 = 1$
(2) $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta.\alpha$
(3) Si β est un ordinal limite, $\alpha^\beta = Sup\left\{\alpha^\xi : \xi < \beta\right\}$

On trouvera quelques exercices «simples» permettant de se familiariser avec les ordinaux dans
K.Kunen : «Set theory» (fin du chap.I), notamment une théorie assez inattendue concernant la décomposition des ordinaux dénombrables en produits d'ordinaux particuliers, ce qui mène invariablement à dégager la notion d'ordinaux «indécomposables» (à ce sujet, voir aussi Bourbaki : «Théorie des ensembles»).