

Chap 2 :

Les axiomes

Remarque 1 préliminaire : *En théorie des ensembles, on décide une bonne fois pour toutes que tout ce qui est écrit et qui n'est pas un symbole logique est un ensemble, par conséquent la formule « $x = x$ » signifie exactement que x est un ensemble.*

Axiome 0 (Axiome d'existence) :

$$\exists x(x = x)$$

[Il existe au moins un ensemble].

Axiome 1 (Axiome d'extensionnalité) :

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \iff z \in y)) \Rightarrow (x = y)$$

[2 ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux].

Axiome 2 (Axiome de fondation) :

$$\forall x [\exists y (y \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x) \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)]$$

Cela signifie que tout ensemble non vide possède un élément minimal pour la relation d'appartenance, ce qui implique en particulier qu'il n'existe pas d'ensemble x tel que $x \in x$, et qu'il n'existe pas de suite finie x_1, x_2, \dots, x_n telle que

$$x_1 \in x_2, x_2 \in x_3, \dots, x_{n-1} \in x_n \text{ et } x_n \in x_1.$$

Cet axiome ne sert à rien en mathématiques, mais il est «rassurant».

On n'utilisera jamais l'axiome 2 dans cette introduction à la théorie des ensembles. En particulier, quand on voudra démontrer, pour un ensemble donné x , que $x \notin x$, on le fera toujours sans faire appel à l'axiome de fondation.

Axiome 3 (Schéma de compréhension) :

pour toute formule ϕ ne comportant pas y comme variable libre :

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \wedge \phi)$$

Commentaires :

→ L'ensemble y qui est censé exister d'après l'axiome 3 est unique d'après l'axiome d'extensionnalité, et on le note

$$y = \{x : x \in z \wedge \phi\}$$

$$\text{ou } y = \{x \in z : \phi\}$$

→ Comme son nom l'indique, le schéma de compréhension permet de définir un ensemble «en compréhension» comme sous-ensemble d'un ensemble supposé connu.

→ A part y , la formule ϕ peut comporter n'importe quelle variable libre.

Par exemple, si ϕ comporte x, w_1, \dots, w_n comme variables libres, l'axiome 3—pour ϕ — peut s'écrire :

$$\forall z \forall w_1, \dots, w_n \exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \wedge \phi)$$

→ On est obligé de supposer que ϕ ne contient pas la variable libre y pour éviter certaines absurdités.

Exemple 1 : Si $\phi : \langle x \notin y \rangle$, on aurait :

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \wedge x \notin y)$$

ce qui serait incompatible avec l'existence d'un ensemble z non vide.

→ On ne peut pas se passer de l'ensemble de référence z , car l'axiome $\exists y \forall x (x \in y \iff \phi)$ est faux.

En effet : Soit $\phi : \langle x \notin x \rangle$

On aurait alors : $\exists y \forall x (x \in y \iff x \notin x)$

Question : A-t-on $y \in y$?

Si $y \in y$, alors $y \notin y$

Si $y \notin y$, alors $y \in y$

Moralité : $y \in y \iff y \notin y$, ce qui est absurde.

Remarque 2 : C'est exactement le paradoxe de Russel

(Le barbier du village etc.)

On dit que la formule $\langle x \notin x \rangle$ n'est pas collectivisante en x (elle ne permet pas de définir un ensemble).

→ Bien qu'il exprime une idée unique, le schéma de compréhension consiste en une collection infinie d'axiomes —un pour chaque formule ϕ —.

Conséquences des axiomes 0, 1, 3 :

D'après l'axiome 0, il existe un ensemble z .

Soit ϕ la formule $\langle x \neq x \rangle$.

D'après le schéma de compréhension, il existe un ensemble

$$y = \{x \in z : x \neq x\}$$

Voici donc un ensemble qui n'a pas d'élément, et qui est unique d'après l'axiome d'extensionnalité.

Définition 1 : \emptyset est l'unique ensemble y tel que $\forall x (x \notin y)$

Nous allons montrer en passant qu'il n'existe pas d'ensemble universel.

Théorème 1 : $\neg \exists z \forall x (x \in z)$

Démonstration : Si un tel z existe, d'après le schéma de compréhension il existe aussi un ensemble

$$y = \{x \in z : x \notin x\}$$

mais alors $y = \{x : x \notin x\}$

et on a vu qu'un tel ensemble y ne peut pas exister.

Définition 2 : $A \subset B$ est l'abréviation pour $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

on a en particulier $A \subset A$ et $\emptyset \subset A$.

Axiome 4 (Axiome de la paire) :

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

Conséquences de l'axiome 4 :

x, y donnés

Soit z n'importe quel ensemble tel que $x \in z \wedge y \in z$

D'après le schéma de compréhension, il existe un ensemble

$$A = \{v \in z : v = x \vee v = y\}$$

Cet ensemble, unique d'après l'axiome d'extensionnalité, a précisément x et y pour éléments.

Notation : $A = \{x, y\}$

Si $x = y$, on note $A = \{x\} = \{x, x\}$ l'ensemble dont le seul élément est x .

Enfin, $\{x\}$ et $\{x, y\}$ étant maintenant 2 ensembles, on note $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ le **couple** (ou la **paire ordonnée**) formé de x et de y .

Axiome 5 (Axiome de la réunion) :

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A)$$

Commentaires : \mathcal{F} est supposé être une famille d'ensembles, et l'axiome 5 postule l'existence d'un ensemble A tel que chaque élément Y de \mathcal{F} soit un sous-ensemble de A .

Conséquences de l'axiome 5 :

→ On peut maintenant définir la réunion de la famille \mathcal{F} par :

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y)\}$$

Cet ensemble existe, d'après le schéma de compréhension, car

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \in A : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y)\}$$

→ Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, on pose

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x : \forall Y \in \mathcal{F} (x \in Y)\}$$

Cet ensemble existe car, pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \in B : \forall Y \in \mathcal{F} (x \in Y)\}$$

[On n'utilise pas l'axiome 5 ici].

→ Si $\mathcal{F} = \emptyset$, alors $\bigcup \mathcal{F} = \emptyset$

et $\bigcap \mathcal{F}$ «serait» l'ensemble de tous les ensembles, qui n'existe pas.

Nouvelles notations :

$$A \cap B = \bigcap \{A, B\}$$

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}$$

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

Axiome 6 (Schéma de remplacement) :

pour toute formule ϕ ne comportant pas Y comme variable libre :

$$\forall A \forall x \in A \exists! y \phi(x, y) \Rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y)$$

Traduction : Soit A un ensemble, supposons que, pour tout $x \in A$, il existe un unique y , quelque part dans la nature, qui vérifie $\phi(x, y)$.

On a envie de «saisir» l'ensemble de tous les y en question (cet objet semble en effet suffisamment petit pour constituer un ensemble puisque, grâce au $\exists!$, il doit avoir une cardinalité \leq à celle de A).

L'axiome de remplacement fournit l'existence d'un tel ensemble Y qui contient tous ces y .

Conséquences de l'axiome 6 :

Conséquence 1 : On peut définir effectivement l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{y : \exists x \in A, \phi(x, y)\}$$

\mathcal{Z} existe d'après remplacement + compréhension, puisque

$$\mathcal{Z} = \{y \in Y : \exists x \in A, \phi(x, y)\} \text{ pour n'importe quel } Y \text{ fourni par l'axiome 6.}$$

Conséquence 2 : On va pouvoir maintenant définir proprement le produit cartésien de 2 ensembles A et B .

Définition 3 : $A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B\}$

Exercice 1 : Justifier cette définition en appliquant 2 fois le schéma de remplacement.

Réponse : pour tout $y \in B$ (y fixé), on a :

$$\forall x \in A, \exists! z, (z = \langle x, y \rangle)$$

D'après la conséquence 1, on peut définir

$$\text{prod}(A, y) = \{z : \exists x \in A, (z = \langle x, y \rangle)\}$$

Maintenant, $\forall y \in B, \exists! z, (z = \text{prod}(A, y))$

Toujours d'après la conséquence 1, on peut définir

$$\text{prod}'(A, B) = \{\text{prod}(A, y) : y \in B\}$$

et pour finir $A \times B = \bigcup \text{prod}'(A, B)$.

Remarque 3 : Tout comme le schéma de compréhension, le schéma de remplacement consiste en une infinité d'axiomes—un pour chaque formule ϕ —.

Remarque 4 : Les plus puristes d'entre vous auront déjà remarqué qu'il y a certaines redondances dans cet exposé. En effet, il est possible de démontrer (mais c'est non trivial) que le schéma de compréhension est une conséquence des autres axiomes de la théorie, en particulier du schéma de remplacement. C'est toutefois dans un souci de clarté que j'ai préféré présenter les choses dans un ordre de difficulté croissante. On utilise sans le savoir le schéma de compréhension depuis tous petits, par exemple quand on écrit, à propos de l'ensemble des nombres pairs, $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y\}$. En ce qui concerne le schéma de remplacement c'est une autre paire de manches. On peut en fait aller très loin en théorie des ensembles en se passant complètement de l'axiome 6. C'est seulement lors de manipulations délicates sur les ordinaux qu'il s'avère indispensable, et nous le signalerons en temps utile.

Les axiomes 0, 1, 3, 4, 5, 6 vont nous suffire pour définir correctement les notions de relation, de fonction et de bon ordre. Cette dernière nous conduira tout naturellement, au Chap 4, à la notion fondamentale d'ordinal.

Nous devons alors postuler l'axiome 7 (axiome de l'infini) pour pouvoir construire \mathbb{N} , puis \mathbb{Z} et \mathbb{Q} . L'axiome 8 (axiome de l'ensemble des parties) nous sera indispensable pour construire \mathbb{R} .

Enfin, il sera discuté âprement de l'axiome 9 (axiome du choix) au Chap 11.