Chap. 13 :

Un peu d'arithmétique élémentaire sur les cardinaux transfinis

1 Rappels

Lemme 1 *: (1) Tout ω_α est un cardinal.*
(2) Tout cardinal infini est égal à ω_α pour un certain ordinal α.
(3) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta$
(4) ω_α est un cardinal limite ssi α est un ordinal limite.
ω_α est un cardinal successeur ssi α est un ordinal successeur.

Lemme 2 *(AC) : S'il existe une surjection de X sur Y, alors $Card\, Y \leq Card\, X$*

2 Opérations sur les cardinaux

Définition 1 *: (1) $\kappa \bigoplus \lambda = Card\ (\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\})$*
(2) $\kappa \otimes \lambda = Card\ (\kappa \times \lambda)$

Lemme 3 *: Tout cardinal infini est un ordinal limite.*

Théorème 1 *: Si κ est un cardinal infini, alors $\kappa \otimes \kappa = \kappa$*

Corollaire 1 *: Si κ et λ sont des cardinaux infinis, alors*
$\kappa \bigoplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$

Définition 2 *: κ étant un cardinal quelconque, on note $\kappa^{<\omega}$ l'ensemble des applications de domaine une partie finie de ω,à valeurs dans κ.*

$$\text{En fait, } \kappa^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} \kappa^n$$

Proposition 1 *: Si κ est un cardinal infini, alors $Card\,(\kappa^{<\omega}) = \kappa$*

Citons enfin une conséquence importante des théorèmes précédents.

Théorème 2 *(AC) : Si $\kappa \geq \omega$ et si $Card\,(X_\alpha) \leq \kappa$ pour tout $\alpha < \kappa$, alors*

$$\left| \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha \right| \leq \kappa$$

Ce théorème signifie en clair que, pour tout cardinal infini κ, la réunion de κ ensembles de cardinal κ est encore de cardinal κ, ce qui généralise le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

3 Fonctions et cardinaux

Définition 3 *: Soit $n \in \omega$*

$\rightarrow$ Une fonction n-aire sur A est une fonction $f : A^n \rightarrow A$ si $n > 0$, et un élément de A si $n = 0$

$\rightarrow$ Si $B \subset A$, B est stable par f ssi $f(B^n) \subset B$

(ou $f \in B$ si $n = 0$)

$\rightarrow$ Une fonction finitaire est une fonction n-aire pour un certain $n \in \omega$.

$\rightarrow$ Si $\mathcal{S}$ est un certain ensemble de fonctions finitaires, la «clôture fonctionnelle de B par $\mathcal{S}$» est le plus petit ensemble $C \subset A$ tel que $B \subset C$ et C stable par toutes les fonctions de $\mathcal{S}$.

[en fait, $C = \bigcap \{D : B \subset D \subset A,\ D \text{ stable par } \mathcal{S}\}$.

Théorème 3 *(AC) : Soit κ un cardinal infini.*

Si $B \subset A$, $|B| \leq \kappa$, et $\mathcal{S}$ un ensemble de fonctions finitaires sur A, alors la clôture fonctionnelle de B par $\mathcal{S}$ a une cardinalité $\leq \kappa$.

4 Exponentiation des cardinaux

Définition 4 *: A, B 2 ensembles.*

On note A^B l'ensemble des fonctions telles que $dom(f) = B$ et $Im(f) \subset A$

Définition 5 *(AC) : κ, λ 2 cardinaux.*

$\kappa^\lambda = Card(\kappa^\lambda)$

Explication : Le κ^λ du membre de droite est l'ensemble κ^λ au sens de la définition précédente.

Le κ^λ du membre de gauche est le cardinal résultant de l'opération exponentiation des cardinaux κ et λ.

Lemme 4 *: Si $\lambda \geq \omega$ et si $2 \leq \kappa \leq \lambda$,*

alors $\kappa^\lambda \approx 2^\lambda \approx \mathcal{P}(\lambda)$

i.e. $\kappa^\lambda = 2^\lambda = Card\ (\mathcal{P}(\lambda))$

Lemme 5 *(AC) : Si κ, λ, σ sont des cardinaux, alors*

$\kappa^{\lambda \bigoplus \sigma} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\sigma$

$\left(\kappa^\lambda\right)^\sigma = \kappa^{\lambda \otimes \sigma}$

Définition 6 *(AC) : (1) $A^{<B} = \{A^\alpha : \alpha < B\}$*

(2) $\kappa^{<\lambda} = Card\ \left(\kappa^{<\lambda}\right)$

5 Notion de cofinalité. Cardinaux réguliers. Cardinaux inaccessibles.

Définition 7 *: Soit $f : \alpha \rightarrow \beta$*

f est une application cofinale de α dans β ssi $Im(f)$ est non bornée dans β

[i.e. $\forall \gamma \in \beta, \exists x \in \alpha, f(x) \geq \gamma$].

Définition 8 *: La cofinalité de β, notée $cf(\beta)$, est le plus petit ordinal α tel qu'il existe une application cofinale $f : \alpha \rightarrow \beta$*

Remarque 1 *: $\rightarrow cf(\beta) \leq \beta$*

$\rightarrow$ Si β successeur,alors $cf(\beta) = 1$

Lemme 6 *: Il existe une application cofinale $f : cf(\beta) \rightarrow \beta$ qui est strictement croissante*

[$\xi < \eta \Rightarrow f(\xi) < f(\eta)$].

Démonstration : Soit $g : cf(\beta) \rightarrow \beta$ une application cofinale quelconque,
on définit f par récurrence transfinie :
$f(0) = g(0)$
$f(\eta) = Max\,(g(\eta), Sup\,\{f(\xi) + 1 : \xi < \eta\})$

Lemme 7 *: Si α est un ordinal limite et si $f : \alpha \rightarrow \beta$ est une application cofinale strictement croissante, alors $cf(\alpha) = cf(\beta)$*

Corollaire 2 *: cf$(cf(\beta)) = cf(\beta)$*

Définition 9 *: β est régulier ssi β est un ordinal limite et $cf(\beta) = \beta$*

Lemme 8 *: Si β est régulier, alors β est un cardinal.*

Lemme 9 *: ω est régulier.*

Lemme 10 *(AC) : Si κ est un cardinal infini, alors κ^+ est régulier.*

Lemme 11 *: Si α est un ordinal limite, alors $cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha)$*

Exemple 1 *: $cf(\omega_\omega) = cf(\omega) = \omega$*
ω_ω est le plus petit cardinal singulier.

Exercice 1 *: Faire toutes les démonstrations du Chap. 13, jusqu'au lemme 11 inclus.*

Théorème 4 *: Si ω_α est un cardinal limite régulier, alors $\omega_\alpha = \alpha$*

Démonstration : D'après le lemme 11, on a $cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha)$
ω_α étant régulier, on a aussi $cf(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$
donc $cf(\alpha) = \omega_\alpha$
mais, comme $cf(\alpha) \leq \alpha$, on doit avoir $\omega_\alpha \leq \alpha$
mais comme, par construction des cardinaux, on a toujours $\omega_\alpha \geq \alpha$,
on en déduit que $\omega_\alpha = \alpha$

Remarque 2 *: Cette condition n'est pas suffisante.*

En effet,posons
$\sigma_0 = \omega$
$\sigma_{n+1} = \omega_{\sigma_n}$
et $\alpha = Sup\,\{\sigma_n : n \in \omega\}$
Il est clair, par construction, que $\omega_\alpha = \alpha$
Par ailleurs, α est un cardinal limite *(puisque égal à ω_α avec α ordinal limite)*, α est le plus petit ordinal satisfaisant $\omega_\alpha = \alpha$, mais $cf(\alpha) = \omega$,donc α est singulier.
Le plus petit cardinal limite régulier, s'il existe, est encore beaucoup plus grand que α.

Définition 10 *: (1) κ est faiblement inaccessible [weakly inaccessible] ssi κ est un cardinal limite régulier $> \omega$.*
[κ régulier et $\kappa > \omega$ et $\forall \lambda < \kappa, \lambda^+ < \kappa$]
(2) κ est fortement inaccessible [strongly inaccessible] ssi κ est régulier, $\kappa > \omega$ et $\forall \lambda < \kappa, 2^\lambda < \kappa$.

Remarque 3 *: Les cardinaux fortement inaccessibles sont faiblement inaccessibles et, si (GCH) est vraie, les 2 notions coïncident.*

Quelques remarques d'ordre culturel :

(1) Il est consistant avec ZFC que 2^ω soit le plus petit cardinal faiblement inaccessible.
(2) Il est consistant avec ZFC que 2^ω soit strictement plus grand que le plus petit des cardinaux faiblement inaccessibles.
(3) Il est consistant avec ZFC qu'il n'existe pas de cardinaux faiblement inaccessibles.

(4) Pire : S'il existe un cardinal fortement inaccessible, alors ZFC est consistante.

(ce qui prouve en particulier, via le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel, qu'il est impossible de démontrer l'existence d'un cardinal fortement inaccessible).

(5) Encore pire : S'il existe un cardinal fortement inaccessible, alors la théorie ZFC+«Il n'existe pas de cardinal fortement inaccessible» est consistante.

(6) Enfin : On ne sait pas encore, à l'heure actuelle, si l'existence de cardinaux fortement inaccessibles est consistante avec ZFC.

Addendum : Mieux, on ne le saura jamais... sauf, bien sûr, si elle est inconsistante.

De même qu'il est impossible de prouver l'existence d'un inaccessible, il est également impossible de prouver sa consistance.