Chap. 12 :

Influence de l'axiome du choix sur la hiérarchie des cardinaux transfinis

Dans toute la suite du cours, on travaillera dans la théorie ZFC, constituée des axiomes 0 à 8,augmentés de l'axiome 9 ci-dessous.

Axiome 9 (Axiome du choix) : $\forall X \exists f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \to X \ (\forall y \in \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}, f(y) \in y)$

On pourra donc utiliser librement les diverses conséquences de l'axiome du choix examinées au Chap. 11, en particulier le théorème de Zermelo et le fait que tout ensemble possède une cardinalité.

La mention (AC) en tête de l'énoncé d'un théorème ou d'une définition signifiera que l'axiome du choix intervient de façon cruciale dans la démonstration du théorème, ou que la définition n'a de sens que si l'on suppose l'axiome du choix.

1 Un théorème de Cantor

On a vu que $\mathbb{R}$ a un cardinal, que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\omega)$ [donc $Card\,\mathbb{R} = Card\,\mathcal{P}(\omega)$]
et que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
En conclusion, $Card\,\mathcal{P}(\omega) > Card\,\omega$
On va voir maintenant que ce phénomène est général.

Théorème 1 *de Cantor :* $\forall x, x \prec \mathcal{P}(x)$

Démonstration : Il existe une injection triviale de x dans $\mathcal{P}(x)$
$\sigma : x \to \mathcal{P}(x)$
$y \mapsto \{y\}$
Reste à montrer qu'il n'existe pas de bij. de x sur $\mathcal{P}(x)$
Par l'absurde.
Soit $f : x \to \mathcal{P}(x)$ bij.
et soit $Y = \{y \in x \,|\, y \notin f(y)\}$
et soit $z = f^{-1}(Y)$

Question : A-t-on $z \in f(z)$?

Réponse : Si $z \in f(z)$, alors $z \in f(f^{-1}(Y))$, i.e. $z \in Y$, donc $z \notin f(z)$
Si $z \notin f(z)$, alors $z \in Y$, donc $z \in f(z)$

Moralité : $z \in f(z) \Longleftrightarrow z \notin f(z)$,absurde.

Ce type de raisonnement caractéristique est connu sous le nom de «procédé diagonal de Cantor».

Remarque 1 *importante : Il est clair que l'énoncé et la démonstration du théorème de Cantor ne font en aucun cas appel à l'axiome du choix.*

En revanche, si on suppose l'axiome 9, tout ensemble possède une cardinalité, et le théorème de Cantor peut donc s'écrire

Théorème 2 *(AC) :* $\forall x, Card\,\mathcal{P}(x) > Card(x)$

et c'est de cette inégalité entre cardinaux dont on va se servir dans la suite du cours.

2 La hiérarchie des cardinaux transfinis, deuxième épisode

Le théorème de Cantor redémontre évidemment que $|\mathcal{P}(\omega)| > \omega$, donc que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, mais on peut maintenant aller plus loin :

$\omega < |\mathcal{P}(\omega)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)))| < ...$

et on peut définir, par récurrence transfinie, la hiérarchie des cardinaux $\beth_\alpha$

Remarque 2 *préliminaire : pour un cardinal donné κ, on note 2^κ le cardinal de $\mathcal{P}(\kappa)$, par analogie au fait que, si $Card\,E = n$, alors $Card\,\mathcal{P}(E) = 2^n$*

Définition 1 *: (1)* $\beth_0 = \omega$

(2) $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$

(3) Si γ ordinal limite, $\beth_\gamma = Sup\,\{\beth_\alpha : \alpha < \gamma\}$

On dispose maintenant de 2 hiérarchies sur les cardinaux infinis, dont la première est complète :

$\omega < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < ... < \omega_\omega < ... < \omega_\xi < ...$

$\omega < 2^\omega = \beth_1 < 2^{2^\omega} = \beth_2 < \beth_3 < ... < \beth_\omega < ... < \beth_\xi < ...$

Comme, maintenant, tout ensemble possède un cardinal, pour tout ensemble E, $Card\,E$ a sa place dans la hiérarchie ω_α.

En particulier, $Card\,\mathbb{R} \in \{\omega_\alpha : \alpha \geq 1\}$, mais on ne sait pas quel est le «bon α».

A priori, le théorème de Cantor permet d'affirmer que $2^{\omega_\alpha} > \omega_\alpha$, donc que $2^{\omega_\alpha} \geq \omega_{\alpha+1}$

Ne parvenant pas à exhiber de cardinaux strictement compris entre ω_α et 2^{ω_α}, Cantor a conjecturé que $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$.

On sait depuis Cohen (1962) que cette proposition est indécidable.

Définition 2 *(AC) :*

(CH) [Continuum Hypothesis] est l'hypothèse : $2^\omega = \omega_1$

(GCH) [Generalized Continuum Hypothesis] est l'hypothèse : $\forall \alpha, (2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$

Remarque 3 *: (GCH) est équivalente à l'hypothèse :* $\forall \alpha, (\beth_\alpha = \omega_\alpha)$

3 Une curiosité

Supposons (CH) : $2^\omega = \omega_1$

Il existe donc une bijection $\varphi : \omega_1 \to \mathbb{R}$

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ défini par :

$(x, y) \in A$ ssi $\varphi^{-1}(x) < \varphi^{-1}(y)$

$\to$ Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé

$\varphi^{-1}(y) \in \omega_1$,donc $\varphi^{-1}(y)$ est un certain ordinal dénombrable.

Soit $\Delta_y = \{x \in \mathbb{R}\,|(x,y) \in A\}$
On a $\Delta_y = \{x \in \mathbb{R}\,|\varphi^{-1}(x) < \varphi^{-1}(y)\}$
Δ_y est un ensemble dénombrable.

$\rightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé
$S_x = \{y \in \mathbb{R}\,|(x,y) \in A\}$
On a $S_x = \{y \in \mathbb{R}\,|\varphi^{-1}(y) > \varphi^{-1}(x)\}$
S_x est un ensemble de complémentaire dénombrable dans $\mathbb{R}$.

Moralité : La trace sur A de toute horizontale est dénombrable.
La trace sur A de toute verticale est de complémentaire dénombrable.
En particulier, A n'est pas Lebesgue-mesurable, car sinon, d'après Fubini, on aurait d'une part :
$\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}} 0dy = 0$
et d'autre part :
$\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}} +\infty dx = +\infty$
d'où 0=$+\infty$, absurde.

Remarque 4 *: Il est de notoriété publique que l'existence de sous-ensembles non Lebesgue-mesurables de la droite réelle (ou du plan) ne peut être mise en évidence que si on suppose l'axiome du choix (voir par exemple le paragraphe «philosophique» de la séquence précédente). En revanche, l'existence d'ensembles aussi «tordus» que le précédent est étroitement liée à l'hypothèse du continu.*