Chap. 11 :

Différentes formes de l'Axiome du Choix. Applications diverses.

1 L'axiome du choix lui-même

Dans toute la suite, (AC) désigne l'énoncé suivant, que nous prendrons comme «Axiome 9» de notre théorie.

(AC) : pour tout ensemble X, il existe une «fonction de choix» sur X, i.e. une application
$f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \to X$ telle que
$\forall Y \in \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}\,,\ f(Y) \in Y$
[f «choisit» un élément dans chaque sous-ensemble non vide de X].

Donnons tout de suite une forme presque trivialement équivalente de l'axiome du choix.

(AC') : Soit I un ensemble non vide, et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexés par I.

$$\text{Si } \forall i \in I,\ X_i \neq \emptyset, \text{ alors } \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$$

Théorème 1 *: (AC) $\Longleftrightarrow$ (AC′)*

Démonstration : $\Rightarrow$)

$$\text{Soit } E = \bigcup_{i\in I} X_i$$

[E existe d'après l'axiome de la réunion].
Soit f une fonction de choix sur E
$f : \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\} \to E$
On a $\forall i \in I$, $X_i \in \mathcal{P}(E)$ et $X_i \neq \emptyset$
donc $f(X_i) \in X_i$
Soit $x_i = f(X_i)$
On a $\forall i \in I$, $x_i \in X_i$

$$\text{et donc } (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$$

$\Leftarrow$) Soit X un ensemble, et soit $I = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$

$$\text{D'après (AC'), } \prod_{Y\in I} Y \neq \emptyset$$

$$\text{Soit } (x_Y) \in \prod_{Y \in I} Y$$

On définit sur $\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ la fonction f par :
$\forall Y \in \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}\,,\ f(Y) = x_Y$
et on a bien $x_Y \in Y$ par définition du produit cartésien.
f est bien une fonction de choix sur X.

Nous allons maintenant examiner une conséquence immédiate de l'axiome du choix, qui va combler une des lacunes de notre précédente théorie.

Lemme 1 *(AC) : S'il existe une surjection $\varphi : X \to Y$, alors il existe une injection $i : Y \to X$*

Démonstration : φ étant surjective, on a $\forall y \in Y, \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$
Soit f une fonction de choix sur X
On définit l'application i sur Y par :
$\forall y \in Y,\ i(y) = f\left(\varphi^{-1}(y)\right)$
Comme $\varphi^{-1}(y) \subset X$ et $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$, i est bien définie.
Montrons que i est injective :
Si $i(y) = i(y')$, alors $f\left(\varphi^{-1}(y)\right) = f\left(\varphi^{-1}(y')\right) = x$
On a donc $x \in \varphi^{-1}(y) \cap \varphi^{-1}(y')$
donc $\left.\begin{array}{r} \varphi(x) = y \\ \text{et } \varphi(x) = y' \end{array}\right\} \Rightarrow y = y'$, CQFD.

Conséquence : On a vu l'existence d'une surjection de $\mathbb{R}$ sur ω_1.
Il existe donc une injection de ω_1 dans $\mathbb{R}$.
Cela prouve que le plus petit ordinal non dénombrable peut être «plongé» dans l'ensemble des nombres réels.

2 Un lemme de théorie des ensembles

Définition 1 *: X ensemble non vide*
$\Im$ une famille de sous-ensembles de X (i.e. $\Im \subset \mathcal{P}(X)$)
Soit $\Phi \subset \Im$
On dira que Φ est une «chaîne» de $\Im$ ssi Φ est totalement ordonnée par la relation d'inclusion
[$A \in \Phi,\ B \in \Phi \Rightarrow A \subset B$ ou $B \subset A$]

La réunion de tous les éléments de Φ s'appellera l'union de Φ, et sera notée $U(\Phi)$.

Exemple 1 *: $X = \mathbb{Z}$*
$\Im =$ l'ensemble de tous les idéaux de $\mathbb{Z}$
donc $\Im = \{a\mathbb{Z} : a \in \mathbb{N}\}$
p un nombre premier
$\Phi = \{p^n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}^*\}$
Φ est trivialement une chaîne de $\Im$, et $U(\Phi) = p\mathbb{Z}$

Lemme 2 *: Soit X un ensemble non vide, et $\Im$ une famille non vide de sous-ensembles de X, telle que, pour toute chaîne $\Phi \subset \Im$, on ait $U(\Phi) \in \Im$.*
Soit $g : \Im \to \Im$ telle que
(1) $\forall A \in \Im,\ A \subset g(A)$
(2) $\forall A \in \Im,\ |g(A) - A| \leq 1$
alors il existe $A \in \Im$ tel que $g(A) = A$

Remarque 1 *: Ce lemme n'utilise que les axiomes élémentaires (0 à 8) de la théorie des ensembles, et ne fait pas appel à l'axiome du choix.*

Démonstration du lemme : Fixons $A_0 \in \Im$

Une sous-famille $\Im'$ de $\Im$ est une «tour» ssi $\Im'$ possède les 3 propriétés suivantes :

(1) $A_0 \in \Im'$

(2) $\forall \Phi$ chaîne de $\Im'$, $U(\Phi) \in \Im'$

(3) Si $A \in \Im'$, alors $g(A) \in \Im'$.

$\rightarrow$ La famille de toutes les tours n'est pas vide.

En effet, soit $\Im_1 = \{A \in \Im \,|A_0 \subset A\}$

$\Im_1$ est une tour.

Verif.: (1) $A_0 \subset A_0$ et $A_0 \in \Im$, donc $A_0 \in \Im_1$

(2) Si Φ chaîne de $\Im_1$: $\forall X \in \Phi$, $A_0 \subset X$ et Φ chaîne de $\Im$,

donc $A_0 \subset U(\Phi)$ et $U(\Phi) \in \Im$,

donc $U(\Phi) \in \Im_1$.

(3) Trivial.

$\rightarrow$ Soit $\Im_0$ l'intersection de toutes les tours.

$\Im_0$ est une tour *[c'est évident car les 3 propriétés se conservent par passage à l'intersection]*, et aucune sous-famille propre de $\Im_0$ n'est une tour.

On va montrer que $\Im_0$ est une chaîne de $\Im$.

$\rightarrow$ Soit $\Gamma = \{C \in \Im_0 \,|\forall A \in \Im_0,\ A \subset C$ ou $C \subset A\}$

$\Gamma \neq \emptyset$ car $A_0 \in \Gamma$

[Si on arrive à montrer que $\Gamma = \Im_0$, on a gagné].

$\rightarrow$ pour tout $C \in \Gamma$:

soit $\Phi(C) = \{A \in \Im_0 \,|A \subset C$ ou $g(C) \subset A\}$

On a $\Phi(C) \subset \Im_0$

On va montrer que $\Phi(C)$ est une tour.

(1) $A_0 \in \Phi(C)$

vrai car $C \in \Gamma$, donc $C \in \Im_0$,donc $A_0 \subset C$

(2) Ψ chaîne de $\Phi(C)$

(*) Soit tous les $X \in \Psi$ vérifient $X \subset C$

dans ce cas, $U(\Psi) \subset C$

et donc $U(\Psi) \in \Phi(C)$

(**) Soit l'un des X vérifie $g(C) \subset X$

et donc $g(C) \subset U(\Psi)$

(3) Soit $A \in \Phi(C)$, il s'agit de montrer que $g(A) \in \Phi(C)$

Premier cas : $A \subset C$ avec $A \neq C$

Comme $C \in \Gamma$ et $g(A) \in \Im_0$, on a $g(A) \subset C$ ou $C \subset g(A)$

Si on avait C inclus strictement dans g(A), comme A est strictement inclus dans C, $g(A) - A$ contiendrait au moins 2 éléments.

donc $g(A) \subset C$

donc $g(A) \in \Phi(C)$

Deuxième cas : $A = C$

alors $g(A) = g(C)$, donc en particulier $g(C) \subset g(A)$

donc $g(A) \in \Phi(C)$

Troisième cas : $g(C) \subset A$
Comme $A \subset g(A)$,on a $g(C) \subset g(A) \Rightarrow g(C) \in \Phi(C)$

Moralité : $\Phi(C)$ est une tour.
mais $\Phi(C) \subset \Im_0$, qui est la plus petite de toutes les tours.
donc $\Phi(C) = \Im_0$, et ce $\forall C \in \Gamma$.

$\rightarrow$ On va montrer maintenant que Γ est une tour.
(1) $\forall A \in \Im_0$, $A_0 \subset A$, donc $A_0 \in \Gamma$
(2) Ψ chaîne de Γ, et soit $A \in \Im_0$ fixé.
(*) Soit $\forall C \in \Psi, C \subset A$, donc $A \subset U(\Psi)$
(**) Soit l'un des C vérifie $A \subset C$, donc $A \subset U(\Psi)$, et dans tous les cas $U(\Psi) \in \Gamma$.
(3) On a vu que $\forall C \in \Gamma$, $\Phi(C) = \Im_0$
i.e. $\forall A \in \Im_0, \forall C \in \Gamma$, $A \subset C$ ou $g(C) \subset A$
en particulier, $\forall A \in \Im_0, \forall C \in \Gamma$, $A \subset g(C)$ ou $g(C) \subset A$
$\forall C \in \Gamma, \forall A \in \Im_0$, $A \subset g(C)$ ou $g(C) \subset A$
$\forall C \in \Gamma$, $g(C) \in \Gamma$.

donc Γ est une tour.
mais $\Gamma \subset \Im_0$
donc $\Gamma = \Im_0$

Conclusion : $\forall C \in \Im_0, \forall A \in \Im_0$, $A \subset C$ ou $C \subset A$
Donc, $\Im_0$ est une chaîne.

Soit $A = U(\Im_0)$
D'après (2), on a $A \in \Im_0$
D'après (3), on a $g(A) \in \Im_0$
donc $g(A) \subset U(\Im_0)$, i.e. $g(A) \subset A$
mais, par hypothèse, $A \subset g(A)$
donc $g(A) = A$, CQFD.

3 Le principe de maximalité de Hausdorff

On note (PM) l'énoncé suivant :

(PM) : Tout ensemble non vide P, partiellement ordonné, contient un sous-ensemble totalement ordonné maximal.

Explication : $(P, \leq)$ ordre partiel
$\exists A \subset P$; $(A, \leq)$ totalement ordonné
et $\forall B \supsetneq A$, $(B, \leq)$ n'est pas totalement ordonné.

Théorème 2 *:* $(AC) \Rightarrow (PM)$

Démonstration : Soit $\Im$ la famille de tous les sous-ensembles totalement ordonnés de P.
→ $\Im \neq \emptyset$ car $\{x\}$ est totalement ordonné.
→ L'union de toute chaîne de $\Im$ est dans $\Im$ (trivial).

Soit f une fonction de choix pour P.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(P) - \{\emptyset\} & \to & P \\ Y & \mapsto & f(Y) \in Y \end{array}$$

pour tout A$\in \Im$, posons $A^* = \{x \in P - A \,|\, A \cup \{x\} \in \Im\}$
Si $A^* \neq \emptyset$, on pose $g(A) = A \cup \{f(A^*)\}$
Si $A^* = \emptyset$,on pose $g(A) = A$
D'après le lemme, il existe $A \in \Im$ tel que $g(A) = A$,
i.e. $\exists A \in \Im$, $A^* = \emptyset$
ce qui veut bien dire que A est un sous-ensemble totalement ordonné maximal.

4 Le lemme de Zorn

$(E, \leq)$ partiellement ordonné, $A \subset E$

Définition 2 *:* *$M \in E$ est un majorant de A ssi $\forall x \in A$, $x \leq M$*

Définition 3 *:* *$M \in E$ est un élément maximal de E ssi $\forall x \in E$, on n'a pas $M < x$*
(i.e. $\forall x \in E$, $M \leq x \Rightarrow M = x$)

Définition 4 *:* *$(E, \leq)$ est inductif ssi toute partie totalement ordonnée de E possède un majorant.*

Dans toute la suite, nous noterons (Zorn) l'énoncé suivant

Lemme 3 *de Zorn : Tout ensemble ordonné non vide et inductif possède un élément maximal.*

Théorème 3 *:* $(PM) \Rightarrow (Zorn)$

Démonstration : Soit A un sous-ensemble totalement ordonné maximal.
A possède un majorant, soit M.
Soit $x \in E$: si $x \in A$, alors $x \leq M$ terminé.
Sinon, comme A est maximal, $A \cup \{x\}$ n'est pas totalement ordonné,
donc $\exists y \in A$,«$x \leq y$» faux et «$y \leq x$» faux.
Si on avait $M < x$, comme $y \leq M$, on aurait $y < x$, absurde.
donc M est bien un élément maximal.

5 Quelques applications du lemme de Zorn

5.1 Existence de bases dans un espace vectoriel de dimension quelconque

Définition 5 *:* *$\mathbb{K}$ corps commutatif, E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
$(u_i)_{i \in I}$ famille d'éléments de E.
$(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre ssi $\forall J \subset I$, J fini,

$$\sum_{j \in J} \alpha_j u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \alpha_j = 0$$

[Toute combinaison linéaire finie qui annule $(u_i)_{i \in I}$ a tous ses coefficients nuls].

Définition 6 *:* $(u_i)_{i\in I}$ *est une famille génératrice de E ssi*

$$\forall x \in E,\ \exists J \subset I,\ J\ fini,\ \exists (\alpha_j)_{j\in J},\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ x = \sum_{j\in J} \alpha_j u_j$$

[Tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments de la famille].

Définition 7 *:* $(u_i)_{i\in I}$ *est une base de E ssi* $(u_i)_{i\in I}$ *est à la fois libre et génératrice.*

Théorème 4 *: Soit* L_0 *une famille libre de E, et G une famille génératrice de E, avec* $L_0 \subset G$.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ *de E telle que* $L_0 \subset \mathcal{B} \subset G$

Démonstration : Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des familles libres de E qui contiennent L_0 et qui sont incluses dans G.
$\mathcal{L} = \{L : L \text{ libre}, L_0 \subset L \subset G\}$
$\mathcal{L} \neq \emptyset$ car $L_0 \in \mathcal{L}$
On va montrer que $\mathcal{L}$ est inductif :

$$\text{Soit } (L_i)_{i\in I} \text{ une famille totalement ordonnée de } \mathcal{L}, \text{ et soit } L = \bigcup_{i\in I} L_i$$

Il est clair que $\forall i \in I,\ L_i \subset L$
Reste à montrer que L$\in \mathcal{L}$, i.e. que L est libre.
Soient $l_1, l_2, ..., l_n \in L$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j = 0$$

$\exists i_1, i_2, ..., i_n$ tels que $l_1 \in L_{i_1}, l_2 \in L_{i_2}, ..., l_n \in L_{i_n}$
Comme la famille $(L_i)_{i\in I}$ est totalement ordonnée, $\exists k \in \{1, ..., n\}$ tel que $l_1, l_2, ..., l_n \in L_{i_k}$
L_{i_k} étant libre, on a $\forall i \in \{1, ..., n\}, \alpha_i = 0$.

Donc, $\mathcal{L}$ admet un élément maximal, soit L.
On va montrer que L est une base, i.e. que L est génératrice.
Soit $x \in E$
$\rightarrow$ Si $x \in L$, x est combinaison linéaire triviale d'éléments de L.
$\rightarrow$ Si $x \notin L$, L étant maximal, $L \cup \{x\}$ n'est pas libre, donc $\exists (\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha) \neq (0, ...0, 0)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i + \alpha x = 0$$

Comme L est libre, on n'a pas $\alpha = 0$
[Sinon, $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq (0, ..., 0)$*, interdit]*
On peut donc diviser par α
$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha} l_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} l_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha} l_n$, CQFD.

Application : Il existe donc une base de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
Une telle base est appelée base de Hamel.
Elle est impossible à exhiber.
[Il faut utiliser l'axiome du choix ou, ce qui revient au même, le lemme de Zorn]

5.2 Existence d'idéaux maximaux

Théorème 5 *de Krull-Akizuki : $(A, +, \times)$ anneau commutatif unitaire, I idéal propre de A.*
Alors il existe un idéal maximal $\mathcal{M} \supset I$.

Démonstration : Soit $\mathcal{I} = \{J : J \text{ idéal propre de A, } J \supset I\}$
$\mathcal{I}$ est non vide, car $I \in \mathcal{I}$, et partiellement ordonné par la relation d'inclusion.
Montrons que $\mathcal{I}$ est inductif.
Soit $(I_k)_{k \in K}$ une famille totalement ordonnée de $\mathcal{I}$.

$$\text{On va montrer que } I_0 = \bigcup_{k \in K} I_k \text{ est un majorant de } \mathcal{I}.$$

$\rightarrow I_0$ est un idéal de A :
(1) $x, y \in I_0 : \begin{cases} \exists k \in K,\ x \in I_k \\ \exists l \in K,\ y \in I_l \end{cases}$
mais $(I_k)_{k \in K}$ est totalement ordonnée, donc $I_k \subset I_l$ ou $I_l \subset I_k$
par exemple $I_k \subset I_l$
donc $x, y \in I_l \Rightarrow x - y \in I_l \Rightarrow x - y \in I_0$
donc $(I_0, +)$ sous-groupe de A.
(2) $x \in I_0$, $a \in A$
$\exists k \in K$, $x \in I_k \Rightarrow ax \in I_k \Rightarrow ax \in I_0$

$\rightarrow I_0$ idéal propre de A :
Si $I_0 = A$, *alors* $1 \in I_0$, donc $\exists k \in K, 1 \in I_k \Rightarrow I_k = A$, Contradiction.

$\rightarrow I_0 \supset I$ (trivial)

$\rightarrow \forall k \in K$, $I_k \subset I_0$ (trivial).

D'après Zorn, $\mathcal{I}$ possède un élément maximal, soit $\mathcal{M}$.
On va montrer que $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de A.
Soit J un idéal propre quelconque de A tel que $\mathcal{M} \subset J$.
$\mathcal{M}$ est un élément maximal de $\mathcal{I}$, donc en particulier $\mathcal{M} \in \mathcal{I}$.
i.e. $\mathcal{M} \supset I$
donc $J \supset I$
donc $J \in \mathcal{I}$
Comme $\mathcal{M}$ élément maximal de $\mathcal{I}$, l'inclusion $\mathcal{M} \subset J$ prouve qu'en fait $\mathcal{M} = J$, CQFD.

Remarque 2 *d'ordre culturel : Le théorème de Krull possède de nombreuses applications en algèbre commutative.*
Citons la plus «médiatisée d'entre elles».

Théorème 6 *de Steinitz : Tout corps admet une clôture algébrique.*

i.e. pour tout corps commutatif $\mathbb{K}$, il existe un corps Ω, contenant $\mathbb{K}$ à isomorphisme près, tel que tout polynôme à coefficients dans Ω possède au moins une racine (dans Ω) et tel que Ω soit une extension algébrique de $\mathbb{K}$ en ce sens que tout élément de Ω est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

De plus, le corps Ω ainsi construit, appelé clôture algébrique de $\mathbb{K}$, est unique à isomorphisme laissant $\mathbb{K}$ invariant près.

5.3 Existence d'ultrafiltres

Définition 8 *: E ensemble.*
On appelle filtre sur E tout ensemble $\Im \subset \mathcal{P}(E)$ *vérifiant les 4 propriétés suivantes :*
(1) $\Im \neq \emptyset$
(2) $\emptyset \notin \Im$
(3) $\forall F_1, F_2 \in \Im,\ \exists F \in \Im,\ F \subset F_1 \cap F_2$
(4) $\forall F \in \Im,\ F \subset B \Rightarrow B \in \Im$

Dessin : Avec beaucoup d'imagination, on peut arriver à «visualiser» un filtre de la façon suivante[1] :

Exemple 2 *:* $E = \mathbb{N}$
$\Im$ *filtre de Fréchet :*
$F \in \Im \Longleftrightarrow \mathbb{N} - F$ *est fini.*

Exemple 3 *: E espace topologique,* $x \in E$
$\Im$ *filtre des voisinages de x :*
$F \in \Im \Longleftrightarrow \exists U$ *ouvert,* $x \in U,\ U \subset F$

Définition 9 *: E ensemble.*
$\Im$ *et* $\Im'$ *2 filtres sur E.*
$\Im$ *est plus fin que* $\Im' \Longleftrightarrow \Im \supset \Im'$

Définition 10 *: E ensemble.*
$\mathcal{U}$ *filtre sur E.*
$\mathcal{U}$ *ultrafiltre* $\Longleftrightarrow \mathcal{U}$ *est maximal pour la finesse.*

[Il n'existe pas de filtre strictement plus fin que $\mathcal{U}$].

Théorème 7 *: E ensemble,* $\mathcal{U}$ *filtre sur E.*
$\mathcal{U}$ *ultrafiltre* $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \in \mathcal{U}$ *ou* $(E - A) \in \mathcal{U}$ *(ou exclusif).*

[1] Toutefois,quand on commence à avoir un peu l'habitude de manipuler des filtres,on se rend compte avec joie que le choix de cette «machine à café» était particulièrement judicieux.

Démonstration : $\Leftarrow$) Soit $\Im \supset \mathcal{U}$
Si $\Im$ contient strictement $\mathcal{U}$, $\exists A \in \Im$, $A \notin \mathcal{U}$
mézalor $(E - A) \in \mathcal{U}$, donc $(E - A) \in \Im$
d'où $A \cap (E - A) \in \Im$
$\emptyset \in \Im$, Contradiction.

$\Rightarrow$) $\mathcal{U}$ ultrafiltre
S'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \notin \mathcal{U}$ et $(E - A) \notin \mathcal{U}$, soit $\mathcal{V}$ défini par :
$V \in \mathcal{V}$ ssi $V \in \mathcal{U}$ ou $\exists F \in \mathcal{U}$, $A \cap F \subset V$
[voir dessin en page suivante].

On va montrer que $\mathcal{V}$ est un filtre.
(1) $\mathcal{V} \neq \emptyset$ car $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \neq \emptyset$
(2) $\emptyset \notin \mathcal{V}$ car $\emptyset \notin \mathcal{U}$ et $\forall F \in \mathcal{U}$, $A \cap F \neq \emptyset$
[sinon, on aurait $F \subset (E - A)$, donc $(E - A) \in \mathcal{U}$, exclu].
(3) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$
$\rightarrow V_1, V_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$
$\rightarrow V_1 \supset A \cap F_1$, $F_1 \in \mathcal{U}$, et $V_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \supset A \cap F_1 \cap V_2$
Or, $F_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$, donc $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$
(4) $V \in \mathcal{V}$ et V$\subset W$
$\rightarrow V \in \mathcal{U} \Rightarrow W \in \mathcal{U} \Rightarrow W \in \mathcal{V}$
$\rightarrow V \supset A \cap F \Rightarrow W \supset A \cap F \Rightarrow W \in \mathcal{V}$
$\mathcal{V}$ est donc un filtre strictement plus fin que $\mathcal{U}$
(car $A \in \mathcal{V}$ et $A \notin \mathcal{U}$), Contradiction.

Théorème 8 *: $\Im$ filtre sur E.*
Alors il existe un ultrafiltre sur E, plus fin que $\Im$.

Démonstration : Soit $\mathcal{Z} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ filtre sur E, $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}\}$
$\mathcal{Z} \neq \emptyset$ car $F \in \mathcal{Z}$
Montrons que $\mathcal{Z}$ est inductif.
$(\Im_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i \in I} \Im_i$$

On vérifie trivialement que $\mathcal{G}$ est un filtre contenant $\Im$, donc $\mathcal{G} \in \mathcal{Z}$.
D'après Zorn, $\mathcal{Z}$ admet un élément maximal $\mathcal{U}$, qui est bien un ultrafiltre plus fin que $\Im$.

Remarque 3 *: On connaît bien les ultrafiltres triviaux :*
E ensemble, $a \in E$
$\mathcal{U}_a = \{F \in \mathcal{P}(E) : a \in F\}$
Ce sont malheureusement les seuls qu'on sache exhiber.
Les autres n'existent que par le biais de l'axiome du choix.

L'intérêt essentiel de la notion d'ultrafiltre réside dans le fait qu'un espace topologique K est compact ssi il est séparé et tout ultrafiltre sur K est convergent. On se sert de cette caractérisation pour démontrer le célèbre

Théorème 9 *de Tychonov : Tout produit de compacts est compact.*

Les ultrafiltres interviennent aussi de façon cruciale dans des théories plus sophistiquées (compactifications de Stone-Čech, existence de cardinaux mesurables etc.).

5.4 Le théorème de Hahn-Banach

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Une forme linéaire est une application linéaire définie sur E, ou sur un sous-espace vectoriel de E, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une application sous-additive est une application $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
(1) $\forall x \in E$, $\forall \lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$
(2) $\forall (x, y) \in E^2$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Théorème de Hahn-Banach, forme analytique : Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application sous-additive.

Soit, d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel, et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\forall x \in G$, $g(x) \leq p(x)$

Alors, il existe une forme linéaire f, définie sur E, qui prolonge g, i.e. telle que $\forall x \in G$, $f(x) = g(x)$, et telle que $\forall x \in E$, $f(x) \leq p(x)$

Démonstration : On considère l'ensemble
$P = \{h : D(h) \subset E \to \mathbb{R},\ \text{D(h) sev de E, h linéaire, } D(h) \supset G,\ \text{h prolonge g et } \forall x \in D(h), h(x) \leq p(x)\}$
P est muni de la relation d'ordre
$(h_1 \leq h_2) \Longleftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2)$ et h_2 prolonge $h_1)$
On a $P \neq \emptyset$ car $g \in P$
D'autre part, P est inductif.
En effet,soit $Q = (h_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de P.

$$\text{On pose } D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$$

et on définit h par : $\forall x \in D(h), h(x) = h_i(x)$
On vérifie trivialement que cette définition a bien un sens, que $h \in P$ et que h est un majorant de Q.
D'après Zorn, P admet un élément maximal, noté f.
On va montrer que $D(f) = E$, ce qui achèvera bien la démonstration du théorème.

Sinon, soit $x_0 \notin D(f)$
On pose $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$
et on définit h sur D(h) par :
Si $x \in D(f), t \in \mathbb{R}, h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$, où α est une constante qui sera fixée ultérieurement de manière à ce que $h \in P$.

On doit donc s'assurer que $\forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}, f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$
mais, grâce à (1), il suffit de vérifier que

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in D(f), f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \\ et \\ \forall x \in D(f), f(x) - \alpha \leq p(x + x_0) \end{array}\right\}$$

Autrement dit, il faut choisir α tel que
$Sup\,\{f(y) - p(y - x_0) : y \in D(f)\} \leq \alpha \leq Inf\,\{p(x + x_0) - f(x) : x \in D(f)\}$
Un tel choix est possible puisque
$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x_0)$, et ceci $\forall x, y \in D(f)$
On notera en effet que
$f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$ *grâce à (2).*
On conclut que f est majorée par h et que $f \neq h$, ce qui contredit la maximalité de f.

Commentaires : Une forme un peu plus faible de Hahn-Banach consiste à dire qu'une forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel de E peut être prolongée en une forme linéaire continue sur E et de même norme.

Le théorème de Hahn-Banach possède de nombreuses applications en analyse, notamment dans la géométrie des espaces vectoriels normés.

Voir par exemple H.Brezis : «Analyse fonctionnelle.Théorie et applications».

5.5 Autres applications du lemme de Zorn

Elles sont multiples. Citons pour mémoire le fait que tout anneau principal est factoriel *(dont on démontre par ailleurs que c'est équivalent à l'axiome du choix)*, l'existence d'une base de transcendance de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ et, bien sûr, le fameux «théorème de Zermelo» auquel nous allons consacrer le paragraphe suivant.

6 Le théorème de Zermelo

A l'avenir, nous désignerons par (Zermelo) l'énoncé suivant, dont nous allons démontrer qu'il est équivalent à l'axiome du choix, au principe de maximalité de Hausdorff et au lemme de Zorn.

(Zermelo) : Tout ensemble peut être bien ordonné.

Théorème 10 *:* $(Zorn) \Rightarrow (Zermelo)$

Démonstration : X ensemble non vide

Soit $\mathcal{E} = \{\langle A, R\rangle, A \subset X, R$ bon ordre sur A$\}$

muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par :

$\langle A, R\rangle \leq \langle B, S\rangle$ ssi $A \subset B$ et S prolonge R au sens suivant :

(1) $\forall (x, y) \in A^2, xRy \Longleftrightarrow xSy$

(2) $\forall x \in A, \forall y \in (B - A), xSy$

[L'ensemble bien ordonné $\langle A, R\rangle$ est une section commençante de l'ensemble bien ordonné $\langle B, S\rangle$].

$\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $A = \{x\}$ est bien ordonné.

Montrons que $\mathcal{E}$ est inductif.

Soit $(\langle A_i, R_i\rangle)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée de $\mathcal{E}$

$$\text{et soit } A = \bigcup_{i\in I} A_i, \text{ muni de la relation d'ordre R définie par :}$$

$x, y \in A : xRy \Longleftrightarrow \exists i \in I,\ xR_iy$

Remarque préliminaire : par définition de $\leq$, si xRy, alors pour tout $j \in I$ tel que $x \in A_j$ et $y \in A_j$,on aura xR_jy

En effet, si $A_j \subset A_i$, on a xR_iy, donc xR_jy

Si $A_i \subset A_j$, comme R_i et R_j coïncident sur A_i, on aura aussi xR_jy

En fait, $xRy \Longleftrightarrow$ pour tout i pour lequel cela a un sens, xR_iy

$\rightarrow$ Montrons que R est une relation d'ordre sur A

Réflexive : Soit $x \in A$

$\exists i \in I, x \in A_i$

donc xR_ix

donc xRx

Antisymétrique : Soient $x, y \in A$
$\exists i \in I, x \in A_i$ et $y \in A_i$
xRy et $yRx \Rightarrow xR_iy$ et $yR_ix \Rightarrow x = y$

Transitive : Soient $x, y, z \in A$
$\exists i \in I, x \in A_i, y \in A_i$ et $z \in A_i$
xRy et $yRz \Rightarrow xR_iy$ et $yR_iz \Rightarrow xR_iz \Rightarrow xRz$

$\rightarrow$ Montrons que R est un bon ordre sur A :
Soit C une partie non vide de A

$$C = C \cap A = C \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (C \cap A_i)$$

Comme $C \neq \emptyset, \exists i \in I, C \cap A_i \neq \emptyset$
$C \cap A_i$ possède un plus petit élément pour R_i, soit x.
On va voir que x est le plus petit élément de C pour R
Soit $y \in C$
(*) Si y$\in A_i, xR_iy$, donc xRy
(**) Si $y \in A \backslash A_i, \exists j \in I, y \in A_j \backslash A_i$
et donc xR_jy
et donc xRy

Conclusion : On a bien $\langle A, R\rangle \in \mathcal{E}$
$\rightarrow$ Montrons que $\forall i \in I, \langle A_i, R_i\rangle \leq \langle A, R\rangle$
$A_i \subset A$ trivial
(1) $x, y \in A_i : xR_iy \Longleftrightarrow xRy$ par définition
(2) $x \in A_i, y \in A\backslash A_i \Rightarrow xRy$ déjà vu
$\langle A, R\rangle$ est bien un majorant de $(\langle A_i, R_i\rangle)_{i \in I}$, donc $(\mathcal{E}, \leq)$ est inductif.

D'après Zorn, $\mathcal{E}$ possède un élément maximal $\langle A, R\rangle$
Si $A = X$ terminé.
Sinon, soit $t \in X\backslash A$, posons $A' = A \cup \{t\}$
et définissons R' par :
(1) $x, y \in A : xR'y \Longleftrightarrow xRy$
(2) $\forall x \in A, xR't$
Il est clair que $\langle A', R'\rangle$ est bien ordonné, Contradiction.

7 Une application du théorème de Zermelo

On va voir que, grâce à Zermelo,il est possible d'appréhender correctement l'ordinal ω_1, même si on ne maîtrise pas bien la notion d'ordinal.

D'après Zermelo, il existe un bon ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite,on appelle section commençante $[0, a]$ l'ensemble
$S_a = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Soit $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} : [0, x]$ soit non dénombrable$\}$

Si $\mathcal{E} = \emptyset$, cela signifie que toute section commençante de $\mathbb{R}$ est dénombrable (mais $\mathbb{R}$ lui-même ne l'est pas).

Si $\mathcal{E} \neq \emptyset$, $\mathcal{E}$ admet un plus petit élément, soit x
donc $[0, x]$ n'est pas dénombrable
et $\forall y < x$, $[0, y]$ est dénombrable.

Moralité : Il existe un ensemble E, bien ordonné par une relation $\leq$, non dénombrable, et dont toute section commençante est dénombrable.

L'ensemble E ainsi construit a exactement les mêmes propriétés «structurelles» que l'ordinal ω_1.

[en fait, $\omega_1 = Type \langle E, \leq \rangle$].

Par ailleurs, Zermelo nous permet d'énoncer le théorème suivant, qui est une conséquence immédiate de l'étude faite au Chap. 10.

Théorème 11 *: Tout ensemble a une cardinalité.*
En particulier, $\mathbb{R}$ *a un cardinal et* $Card\,\mathbb{R} \geq \omega_1$

8 Retour à la case départ

Théorème 12 *:* $(Zermelo) \Rightarrow (AC)$

Démonstration : X ensemble non vide
X peut être bien ordonné par une relation $\leq$
Soit $f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \to X$
$Y \mapsto f(Y)$
où $f(Y)$ est le plus petit élément de Y.
f est bien une fonction de choix sur X.

Moralité : $(AC) \Rightarrow (PM) \Rightarrow (Zorn) \Rightarrow (Zermelo) \Rightarrow (AC)$
La boucle est bouclée.

Conclusion générale : $(AC') \Longleftrightarrow (AC) \Longleftrightarrow (PM) \Longleftrightarrow (Zorn) \Longleftrightarrow (Zermelo)$

9 Complément

Si on est pressé, on peut démontrer directement que $(AC) \Longleftrightarrow (Zermelo)$ sans passer par Zorn, qui est l'étape la plus difficile, mais en utilisant la notion d'ordinaux.

$\Leftarrow$) déjà fait
$\Rightarrow$) X ensemble non vide
Soit $p \notin X$ fixé, et C une fonction de choix sur X
On va définir une fonction F sur les ordinaux, à valeurs dans $X \cup \{p\}$, par récurrence transfinie :
$F(0) = p$
$F(1) = C(X)$
$F(2) = C\left(X - \{F(1)\}\right)$
$F(3) = C\left(X - \{F(1), F(2)\}\right)$
et, pour tout ordinal α,
$F(\alpha) = C\left(X - \{F(\xi) : \xi < \alpha\}\right)$
avec la convention $C(\emptyset) = p$

$\rightarrow$ S'il existe un ordinal $\alpha \neq 0$ tel que $F(\alpha) = p$,
soit α_0 le plus petit d'entre eux
alors $X - \{F(\xi) : \xi < \alpha_0\} = \emptyset$
i.e. $\{F(\xi) : \xi < \alpha_0\} = X$
F est une surjection de l'ordinal α sur $X \cup \{p\}$

mais, par construction, F est injective
donc F bij.: $\alpha \to X \cup \{p\}$
On définit alors un bon ordre sur X en posant
$x \leq y \Longleftrightarrow F^{-1}(x) \leq F^{-1}(y)$

$\to$ Sinon, $\forall\alpha, X - \{F(\xi) : \omega < \alpha\} \neq \emptyset$
i.e. $\forall\alpha, \{F(\xi) : \xi < \alpha\}$ est strictement inclus dans $X \cup \{p\}$
Soit $\mathcal{Z} = \{t \in X \mid \exists\alpha, F(\alpha) = t\}$
$\mathcal{Z}$ est donc strictement inclus dans X
[en fait, $\mathcal{Z} = \mathrm{Im}(F) - \{p\}$]
Soit $\alpha = F^{-1}(\mathcal{Z}) \cup \{0\}$
$\alpha = \{\xi : \xi \text{ ordinal et } F(\xi) \in \mathcal{Z}\} \cup \{0\}$
α est une section commençante d'ordinaux, donc α est un ordinal
et donc $\mathcal{Z} = \{F(\xi) : \xi < \alpha\} - \{p\}$
d'où $F(\alpha) = C(X - \mathcal{Z}) \in X - \mathcal{Z}$
mais $F(\alpha) \in \mathcal{Z}$, Contradiction.

10 Un peu de philosophie

D'une façon générale, l'axiome du choix est employé pour affirmer l'existence d'un objet que l'on est incapable de fabriquer «à la main». C'est le cas, par exemple, des ultrafiltres non triviaux. Tout le monde se promène allègrement dans des ultrafiltres plus fins que le filtre de Fréchet, mais personne n'en a jamais vu, et n'en verra jamais.

Plus facile à comprendre, c'est le cas, également, des fonctions ou ensembles non mesurables pour la mesure de Lebesgue. Toute tentative de construction d'un tel objet fait nécessairement appel à l'axiome du choix. Donnons-en un aperçu.

Le contre-exemple classique de partie non Lebesgue-mesurable de la droite réelle est défini ainsi :

On considère, dans $[0, 1]$, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par
$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

et on appelle A un ensemble formé d'un élément pris dans chaque classe d'équivalence (ou, si on préfère, d'un représentant de chaque classe).

Il est clair qu'un tel ensemble ne peut avoir qu'une «sale tronche», mais il y a pire que cela. En effet, un tel ensemble est impossible à exhiber. Vous avez parfaitement le droit de choisir un représentant d'une classe qu'on appellera la classe n°1, puis d'une classe n°2 et ainsi de suite, mais le problème c'est qu'il y a autant de classes que de nombres réels, à savoir $2^{\aleph_0}$, et rien ne garantit qu'il vous restera quelque chose à l'arrivée...rien, sauf précisément l'axiome du choix. Mais on sent bien qu'on n'est pas très à l'aise avec ce type de constructions.

Historiquement, les choses ne se sont pas toujours passées ainsi. Cantor, lui, ne se posait pas encore ce genre de questions. L'existence d'un bon ordre sur $\mathbb{R}$ découlait pour lui de l'expression du plus simple bon sens. Je choisis un élément au hasard dans $\mathbb{R}$, je l'appelle 0, je choisis un élément au hasard dans $\mathbb{R}- \{0\}$, je l'appelle 1, et au bout d'un moment je vais bien finir par manger l'ensemble de tous les nombres réels. Ce à quoi les nihilistes et autres Saint-Thomas de la fin du $XIX^{ième}$ rétorquèrent que, puisque c'était aussi intuitif, il n'avait qu'à nous le montrer, son bon ordre. C'est seulement au début de ce siècle que Zermelo se résolut à ajouter un axiome supplémentaire selon lequel tout ensemble peut être bien ordonné, mettant ainsi fin aux querelles de comptoir. Vinrent ensuite l'axiome du choix sous sa forme définitive, ainsi que ses nombreuses variantes, dont nous venons d'examiner quelques échantillons.

L'avenir devait apprendre à Zermelo qu'il avait raison, puisque Gödel ($\simeq$ 1933) a construit un modèle de la théorie des ensembles dans lequel l'axiome du choix est vrai, et Cohen ($\simeq$ 1962) en a construit un autre où l'axiome du choix est faux. En gros, l'utilisation de versions «sophistiquées» de l'axiome du choix, comme par exemple le lemme de Zorn, permet d'éviter des pseudo-itérations mal contrôlées sur la fin. Un exemple facile à comprendre est celui de l'existence d'une base pour tout espace vectoriel, que nous avons démontrée «proprement» dans ce chapitre. En effet,le profane pourrait se contenter de dire : je choisis un vecteur e_1 non nul, s'il engendre tout l'espace tant mieux, sinon c'est qu'il existe quelque part un vecteur $e_2 \notin Vect(e_1)$. Si $Vect(e_1, e_2) = E$ tant mieux, et ainsi de suite. Le problème c'est qu'on ne sait pas trop qu'est-ce qui se passe entre le $37^{ième}$ vecteur et le cardinal infini non dénombrable que représente la dimension de E. Il en est de même pour l'existence d'un idéal maximal contenant un idéal I donné. Je suis à peu près sûr que le raisonnement consistant à dire «si I est maximal,tant mieux ; sinon, c'est qu'il existe un idéal propre I_1 contenant strictement I etc.» ne satisfait pleinement personne.

Mais les choses ne sont même pas encore aussi simples. Toute cette belle théorie a failli être remise en question dans les années Soixante, à l'occasion de découvertes concernant la théorie des jeux. Je vais essayer de vous expliquer de quoi il retourne.

On note $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ou, ce qui revient au même, l'ensemble des suites à valeurs entières, et on se donne a priori une partie $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, appelée règle du jeu. Le joueur I choisit un entier u_0, puis le joueur II choisit un entier u_1, ensuite de quoi le joueur I choisit à son tour un entier u_2 et ainsi de suite. A la fin de la partie les 2 joueurs ont construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée résultat de la partie. Le joueur I est déclaré gagnant si le résultat est élément de l'ensemble A, et perdant dans le cas contraire. La question qui se pose de façon naturelle est de savoir si oui ou non l'un des joueurs dispose d'une stratégie gagnante.

Intuitivement, on a envie de dire que si le joueur I n'a pas de stratégie gagnante, c'est que quelque soit son comportement il va finir un jour ou l'autre par être «coincé», ce qui semble augurer d'une stratégie favorable au joueur II. Comme quoi il faut se méfier des intuitions, car ce raisonnement est faux. En fait,si l'ensemble A est ouvert ou fermé dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, le jeu est effectivement déterminé, et Donald Martin a démontré en 1975, au prix d'un tour de passe-passe diabolique utilisant toutes les ressources, même cachées, de la théorie des ensembles, qu'il en est de même si A est borélien. Cinq ans auparavant, le même Martin avait démontré que, s'il existe un cardinal mesurable, c'est-à-dire un cardinal ENORME, alors une classe un peu plus large d'ensembles, appelés les ensembles analytiques, donne lieu à des jeux déterminés, mais personne n'a fait mieux depuis. En fait, si on suppose l'axiome du choix, on peut fabriquer un ensemble A pour lequel le jeu est indéterminé. Par contre, l'axiome de détermination de tous les jeux sur ω, qui consiste à dire : «$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'un des joueurs dispose d'une stratégie gagnante» a la même consistance que ZFC. En clair, l'axiome du choix et l'axiome de détermination ont le même «poids» d'un point de vue logique, mais sont totalement antagonistes l'un de l'autre. Il faut choisir...

C'est précisément ce que certains mathématiciens ont failli faire vers la fin des années 60, après que Solovay ait démontré que, si l'axiome de détermination est vrai, alors plein de trucs, en particulier tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable, ce qui, il faut bien l'avouer, serait bien pratique. Les descendants spirituels des Saint-Thomas de tout-à-l'heure sont alors descendus de leur piédestal l'espace d'une fraction de seconde pour proposer de remplacer définitivement (AC) par (AD). Toutefois les gens sensés ne les ont pas écoutés, et bien leur en a pris car, si (AD) nous privait de quelques pathologies bizarroïdales sur $\mathbb{R}$, il nous aurait privé aussi de fort jolies choses comme le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ (ensemble des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$), les bases de transcendance de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ et l'existence d'une clôture algébrique pour tout corps commutatif.

Beaucoup plus proche de nous, reprenons la démonstration classique de la réciproque de Bolzano-Weierstrass. Dans la deuxième partie de la démonstration, on se donne un réel $\rho > 0$, et il s'agit de prouver qu'il est possible de recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ρ. Le raisonnement est alors le suivant :

Sinon : Soit $x_0 \in E$

En particulier, $B(x_0, \rho)$ ne recouvre pas E, donc $\exists x_1 \in E - B(x_0, \rho)$

B(x_0, ρ) $\cup B(x_1, \rho)$ ne recouvre pas E, donc $\exists x_2 \in E - [B(x_0, \rho) \cup B(x_1, \rho)]$, et ainsi de suite.

On construit donc par récurrence une suite (x_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} B(x_k, \rho)$$

Je dis qu'on a utilisé ici l'axiome du choix, sans le faire exprès... et

Je m'explique : Ayant à notre disposition ce fameux espace métrique E, il est clair que tout un chacun a le droit de choisir un $x_0 \in E$ et d'en faire ce qu'il en veut. A partir du moment où il est établi que la boule $B(x_0, \rho)$ ne recouvre pas E, donc que l'ensemble $E - B(x_0, \rho)$ n'est pas vide, le même tout un chacun a bien entendu le droit de se prendre un $x_1 \in E - B(x_0, \rho)$ et de l'utiliser comme il le souhaite, et ainsi de suite. Le problème, c'est que pour pouvoir parler de la suite (x_n), il faut réaliser l'opération une infinité de fois, et c'est là que la théorie des ensembles classique ne suffit plus plus pour pouvoir affirmer l'existence de l'objet. En effet, reconnaître l'existence de la suite (x_n) revient à utiliser une variante affaiblie de l'axiome du choix, qu'on appelle l'axiome du choix dépendant (ACD), et qui dit la chose suivante : «Soit E un ensemble et R une relation binaire sur E telle que pour tout x il existe y tel que R(x;y). Alors il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que pour tout n, $R(x_n, x_{n+1})$».

Remarque 4 *: Si j'ai employé un ton un peu péremptoire dans cette explication, c'est parce qu'il existe dans la nature des personnes mal embouchées qui crient au scandale quand vous leur expliquez gentiment qu'il faut utiliser l'axiome du choix pour démontrer la réciproque de Bolzano-Weierstrass, voire pour démontrer que tout anneau principal est factoriel. Il est par ailleurs intéressant de noter que ces Monsieur Jourdain, qui sont les principaux détracteurs de l'axiome du choix et passent leur vie à critiquer nos ultrafiltres et autres objets «insaisissables», sont précisément les mêmes qui l'utilisent à longueur de journée en analyse, sans le savoir... la preuve.*

Bref, l'axiome du choix est maintenant reconnu par l'ensemble de la communauté mathématique internationale, on peut donc l'utiliser à profusion, lui et ses nombreuses variantes, chose que nous n'allons pas nous priver de faire dans les deux dernières séquences de ce cours.