Chap. 0 :

Ensembles bien ordonnés

Remarque 1 ***préliminaire*** *: Les définitions utilisées dans ce chapitre sont des définitions «naïves». Les définitions exactes seront données au Chap 3. L'ensemble $\mathbb{N}$ auquel il est fait allusion ici sera défini axiomatiquement aux Chap 4 et 5.*

1 Ensembles ordonnés

1.1 Rappels

Définition 1 *: Soit E un ensemble, et $\mathcal{R}$ une relation sur E.*
$\mathcal{R}$ est réflexive ssi $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}\ x$
$\mathcal{R}$ est antisymétrique ssi $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}\ y$ et $y\mathcal{R}\ x \Rightarrow x = y$
$\mathcal{R}$ est transitive ssi $\forall (x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}\ y$ et $y\mathcal{R}\ z \Rightarrow x\mathcal{R}\ z$

1.2 Définitions

Définition 2 *: E ensemble, $\mathcal{R}$ une relation sur E.*
$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E ssi elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 3 *: $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur E (ou E est totalement ordonné par $\mathcal{R}$) ssi, de plus :*
$\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}\ y$ ou $y\mathcal{R}\ x$
Sino, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur E.

1.3 Eléments remarquables d'un ensemble ordonné

Les définitions suivantes sont généralisables à un ensemble ordonné quelconque. Pour simplifier nous ne les donnerons que pour un ensemble totalement ordonné.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, et soit $A \subset E$.

Majorant : $x \in E$ est un majorant de A ssi $\forall y \in A$, $y \leq x$

Borne supérieure : $B \in E$ est la borne supérieure de A ssi B est le plus petit des majorants de A, i.e. :

(1) $\forall y \in A, y \leq B$

(2) $\forall y \in E, y < B \Rightarrow \exists z \in A, y < z$

l'écriture «$y < B$» signifiant, bien sûr, $y \leq B$ et $y \neq B$.

Notation : $B = Sup(A)$

Plus grand élément : P est le plus grand élément de A ssi $P \in A$ et P est un majorant de A.

Remarque 2 *: P plus grand élément de A ssi*
(1) $P = Sup(A)$
(2) $P \in A$

Exemple 1 *:* $E = (\mathbb{Q}, \leq)$, $A = [0; 1[$

(1) 2 *est un majorant de* A

(2) 1 *est la borne sup de* A

(3) A *n'a pas de plus grand élément (rappelons à ce propos que* $0,999... = 1$*)*

(4) -12 *est un minorant de* A

(5) 0 *est la borne inf de* A*, et* $0 \in A$*, donc* 0 *est le plus petit élément de* A*.*

Nous allons maintenant examiner 2 autres exemples plus subtils.

Exemple 2 *:* ***distance d'un point à une partie***

$E = \mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$, $A \subset E$, $M \in E$

$d(M, A) = Inf\,\{d(M, P)\ ;\ P \in A\}$

La distance n'est pas atteinte en général, i.e. qu'il n'existe pas nécessairement un point P *de* A *tel que* $d(M, P) = d(M, A)$*.*

Prendre, par exemple, $E =$ *le disque ouvert de centre* O *rayon* 2*, et* M *un point de ce cercle.*

Exemple 3 *:* ***L'intégrale de Riemann***

$\int_a^b f(x)dx$ *est la borne sup des intégrales des fonctions en escalier qui minorent* f *sur* $[a, b]$*, et pourtant, en général, il n'existe pas de fonction en escalier qui minore* f *sur* $[a, b]$ *et dont l'intégrale soit égale à celle de* f*.*

2 Ensembles bien ordonnés

Définition 4 *:* *On dit que* $(E, \leq)$ *est bien ordonné, ou que* $\leq$ *est un bon ordre sur* E*, ssi*

$\forall A \in \mathcal{P}(E), A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A, \forall y \in A, x \leq y$

(Toute partie non vide de E *possède un plus petit élément).*

Exemple 4 *:* $E_n = \{0, 1, 2, ..., n\}$*, muni de l'ordre habituel, est bien ordonné.*

Exemple 5 *:* *Il paraît évident que* $\mathbb{N}$ *est bien ordonné. On va voir que c'est en fait équivalent au principe de récurrence.*

Proposition : Tout ensemble bien ordonné est en particulier bien ordonné.

En effet, $\forall (x, y) \in E^2$, l'ensemble $\{x, y\}$ a un plus petit élément, donc $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Remarque 3 *:* *La réciproque est fausse.*

Contrex : $(\mathbb{Z},\ \leq)$ est totalement ordonné mais pas bien ordonné. ($\mathbb{Z}$ lui-même n'a pas de plus petit élément).

3 Axiomatique de Peano standard

3.1 Les axiomes

Comme la géométrie euclidienne, l'axiomatique de Peano, qui conduit à l'arithmétique du premier ordre, comporte des **termes**, c'est-à-dire des objets auxquels on donne un nom mais pas de définition préalable, et des **axiomes**, propriétés que l'on suppose vraies a priori, et qui expriment des relations entre les termes initiaux.

Termes : Zéro, nombre, successeur
Axiomes :
Ax.1 : Zéro est un nombre
Ax.2 : Le successeur d'un nombre est un nombre.
Ax.3 : Des nombres différents ne peuvent avoir le même successeur
Ax.4 : Zéro n'est le successeur d'aucun nombre
Ax.5, appelé aussi Principe de récurrence (*induction*) : Si une propriété appartient à Zéro et si, dès l'instant qu'elle appartient à un nombre elle appartient aussi à son successeur, alors elle appartient à tous les nombres.

Traduction : Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble de tous les nombres, 0 le nombre Zéro, et S l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à tout nombre n associe son successeur $S(n)$.
Ax.1 : $0 \in \mathbb{N}$
Ax.2 : $\forall n \in \mathbb{N},\ S(n) \in \mathbb{N}$
Ax.3 : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ (n \neq m \Rightarrow S(n) \neq S(m))$
Ax.4 : $\forall n \in \mathbb{N},\ S(n) \neq 0$
Ax.5 : $\forall X \subset \mathbb{N},\ [((0 \in X) \wedge \forall n \in \mathbb{N},\ (n \in X \Rightarrow S(n) \in X)) \Rightarrow (X = \mathbb{N})]$

3.2 Conséquences

Théorème 1 *: Tout nombre sauf* 0 *est le successeur d'un nombre et d'un seul.*

Démonstration : L'unicité est garantie par l'axiome 3.
Existence : Soit $X = \{n \in \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N},\ S(p) = n\} \cup \{0\}$
$0 \in X$
$n \in X \Rightarrow S(n) \in X$
donc d'après l'axiome 5, $X = \mathbb{N}$, CQFD.

Définition d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$:
C'est là que les ennuis commencent.
→ Une méthode traditionnelle consiste à définir l'addition dans $\mathbb{N}$:
Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on fixe n et on définit $n + p$ par récurrence sur p :

$$\begin{cases} n + 0 = 0 \\ n + S(p) = S(n + p) \end{cases}$$

Ensuitte on définit

$$n \leq p \text{ ssi } \exists q \in \mathbb{N},\ n + q = p$$

Reste à démontrer que $\leq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
Tout est trivial, à condition de disposer de l'associativité de l'addition.
→ Une autre méthode consiste à définir l'application «plus petit élément» de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ ppe(n, 0) = 0 \\ \forall n' \in \mathbb{N},\ ppe(0, n') = n' \\ \text{Si } n, n' \in \mathbb{N},\ n = S(p), n' = S(p'), \text{ on pose } ppe(n, n') = S\left(ppe(p, p')\right) \end{cases}$$

On définit ensuite la relation $\leq$ par :

$$n \leq p \text{ ssi } ppe(n, p) = n$$

Là encore, quand on cherche à démontrer que $\leq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, on s'aperçoit que tout serait merveilleux si on disposait de la formule

$$ppe(n,p) = ppe(p,n)$$

dont la démonstration semble, hélas, non triviale.

Bref, quelle que soit la méthode employée on finit invariablement par rencontrer un écueil. C'est dû au fait que l'axiomatique de Peano ne nous permet pas exactement de savoir ce que sont les entiers, et que les propriétés élémentaires que nous manipulons tous depuis le CP sont, en fait, non triviales. On commence à ressentir, ici, la nécessité d'une axiomatisation un peu plus «sérieuse».

Revenons à nos moutons : on va supposer que l'une des définitions de $\leq$ nous a permis de démontrer que c'était une relation d'ordre, et on va montrer qu'en fait, l'axiome de récurrence implique que $\mathbb{N}$ est bien ordonné.

Théorème 2 *: $\leq$ est un bon ordre sur $\mathbb{N}$*
i.e. : $\forall A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ admet un plus petit élément.

Démonstration : On va raisonner par contraposée.
Supposons que A n'admet pas de plus petit élément.
Soit alors $B = \mathbb{N} - A$
On va montrer par récurrence sur n la propriété suivante :

$$(P_n) : \ \forall p \leq n, \ p \in B$$

$\rightarrow$ à l'ordre 0 : il s'agit de montrer que $0 \in B$
Or, $0 \notin A$, car sinon 0 serait le plus petit élément de A
donc $0 \in B$
$\rightarrow$ Hypothèse de récurrence : $\forall p \leq n$, $p \in B$
à démontrer : $\forall p \leq S(n)$, $p \in B$
Il suffit en fait de démontrer que $S(n) \in B$
Sinon, $S(n) \in A$
et comme $\forall p \leq n$, $S(n) \notin A$, $S(n)$ serait le plus petit élément de A.
Moralité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \leq n$, $p \in B$
On en déduit, d'après l'axiome de récurrence, que $B = \mathbb{N}$
donc $A = \emptyset$, CQFD.

4 Une autre axiomatique équivalente

On suppose l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$, non vide, bien ordonné par une relation $\leq$, et ne possédant pas de plus grand élément.

Conséquences immédiates :
$\rightarrow$ En particulier $\mathbb{N}$ lui-même admet un plus petit élément, que l'on note 0.
$\rightarrow$ Définissons l'application «successeur» :
Soit $n \in \mathbb{N}$
n n'est pas le plus grand élément de $\mathbb{N}$
donc, $\{p \in \mathbb{N} : p > n\} \neq \emptyset$
Cet ensemble a donc un plus petit élément, soit q.
On pose $S(n) = q$
$\rightarrow$ Montrons maintenant que 2 nombres distincts ne peuvent avoir le même successseur.
Par l'absurde : si $S(n) = S(n') = q$
$n \neq n'$, donc par exemple $n < n'$

donc n' est un majorant strict de n
Comme $S(n') = q$, on a forcément $n' < q$
absurde, car q est le plus petit des majorants stricts de n.

Ce théorème prouve que l'application S est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} - \{0\}$. Nous allons poser comme axiome que c'est une bijection (i.e. une surjection).

Axiome supplémentaire : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N},\ S(p) = n$

Remarque 4 *: On aurait pu remplacer tout ce travail par l'axiomatique suivante :*
«Il existe un ensemble $\mathbb{N}$, non vide, bien ordonné, ne possédant pas de plus grand élément, et tel que, muni de la topologie de l'ordre, l'espace topologique $\mathbb{N}$ n'a pas de point d'accumulation.

Théorème 3 *: L'ensemble $\mathbb{N}$ ainsi construit vérifie l'axiome de récurrence.*

Démonstration : Soit $X \subset \mathbb{N}$ vérifiant $0 \in X$ et $n \in X \Rightarrow S(n) \in X$
Si $X \neq \mathbb{N}$, posons $Y = \mathbb{N} - X$
$Y \neq \emptyset$, donc Y possède un plus petit élément, soit q, et $q \neq 0$ car $0 \notin Y$
D'après l'axiome supplémentaire, $\exists p \in \mathbb{N},\ S(p) = q$
Comme q est le plus petit élément de Y, $p \notin Y$
donc $p \in X$
donc $S(p) \in X$
i.e. $q \in X$, contradiction avec $q \in Y$.

Remarque 5 *: Là encore, on voit que personne n'est pleinement satisfait : on a été obligé de bidouiller grave pour arriver à nos fins, et on n'a toujours pas une idée très précise de ce que sont les entiers.*

Remarque 6 *: On vient de démontrer que «$(\mathbb{N}, \leq)$ bien ordonné» est équivalent à l'axiome de récurrence. En gros, tout ce qu'on vient de faire en ce moment c'est ce qu'on m'avait raconté quand j'étais en Terminale C, en 1974 (avec le baratin en moins, à l'époque). Bref, on est encore en droit de se demander si l'une au moins de ces 2 propriétés a des raisons valables d'être vraie :*

On verra qu'en théorie des ensembles on construit l'ordinal ω de la façons suivante :
$0 = \emptyset$
$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ etc.
avec, d'une façon générale :
$n + 1 = S(n) = n \cup \{n\}$
et que le Postulat numéro 1 de l'arithmétique du premier ordre stipule que l'ordinal ω coïncide avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dont on s'est fait jusqu'à présent une idée «naïve».

On dira alors que $n \leq p$ ssi $n \in p$ ou $n = p$, et il sera clair que $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien ordonné, propriété à partir de laquelle on retrouvera facilement les axiomes de Peano.

5 Autres exemples d'ensembles bien ordonnés - Ensembles bien ordonnables

Exemple 6 *: On a vu que $(\mathbb{Z}, \leq)$ n'est pas bien ordonné.*
En revanche, $\mathbb{Z}$ est bien ordonnable (wellorderable),
i.e. qu'il existe une relation $\mathcal{R}$ telle que $(\mathbb{Z}, \mathcal{R})$ soit bien ordonné.
[Il existe un bon ordre sur $\mathbb{Z}$].

Démonstration : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$ avec $n\mathcal{R}\ p$ ssi n est écrit avant p dans la liste.

Exemple 7 *:* $(\mathbb{Q}_+^*, \leq)$ *n'est pas bien ordonné.*
$A = \left\{x \in \mathbb{Q}_+^* : 0 < x < 1\right\}$ *n'a pas de plus petit élément*
mais $\mathbb{Q}_+^*$ *est bien ordonnable.*

Démonstration : voir le fichier Bien_ordonnable.htm
Conséquence immédiate : $\mathbb{Q}$ est bien ordonnable.
Question : $\mathbb{R}$ est-il bien ordonnable ?
Réponse : Cantor (1874) a supposé implicitement que c'était vrai.
Gödel (1933) a démontré qu'il est impossible de démontrer que c'est faux, et Cohen (1962) a démontré qu'il est impossible de démontrer que c'est vrai.
Zermelo le premier (début du XXième) a eu l'idée de poser un axiome supplémentaire, connu désormais sous le nom d'axiome du choix, qui a pour conséquence l'existence d'un bon ordre sur tout ensemble.
Cette hypothèse pertinente, dont nous aurons l'occasion de mesurer l'impact sur le reste de la théorie des ensembles, a failli être remise en question l'espace d'un instant dans les années soixante, certains chercheurs ayant manifesté l'intention de la remplacer par l'axiome de détermination de tous les jeux sur ω, qui lui est contradictoire *[à ce sujet, voir par exemple Moschovakis : Descriptive Set Theory].* De nos jours, l'axiome du choix et ses conséquences spectaculaires sont admis comme une nécessité incontournable par l'ensemble de la communauté mathématique internationale.
Il sera discuté âprement de ces questions au Chap 11.