Annexe III :

Le principe des tiroirs et des chemises

Quand on introduit pour la première fois les notions d'injection et de surjection (en Première,en Terminale,parfois plus tard),on est amené à expliquer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une injection de E dans F est que $Card\, E \leq Card\, F$.C'est le genre de résultat trivial mais tellement abstrait qu'en général les élèves vous regardent les yeux ronds,se demandant quelle mouche a piqué le prof ce matin pour qu'il ne nous donne pas une brave fonction à étudier avec une intégration par parties à la clef.On se sent alors en général obligé d'inventer des histoires à dormir debout pour mieux faire passer le message.Le truc des tiroirs et des chemises me paraît riche en enseignements.

L'histoire est toujours la même : on a un certain nombre de chemises à ranger dans un certain nombre de tiroirs,mais il existe plusieurs niveaux de complexité.

1 Le principe «basique»

On suppose dans ce paragraphe qu'il n'y a qu'un nombre fini de chemises et de tiroirs.

Théorème 1 *: Si on a moins de chemises que de tiroirs,il y aura au moins un tiroir qui restera vide.*

Théorème 2 *: S'il y a plus de chemises que de tiroirs,il y a au moins un tiroir qui contiendra plusieurs chemises.*

Théorème 3 *: S'il y a autant de chemises que de tiroirs,il est possible de se débrouiller de telle façon que chaque tiroir contienne une chemise et une seule.*

Remarque 1 *: J'ai lu quelque part qu'un informaticien éminent,qui recrutait des jeunes de niveau Bac+2,se plaignait que ses étudiants n'aient jamais entendu parler du principe des tiroirs et des chemises.Soi-disant,donc,que ce truc aurait une utilité dans la recherche fondamentale ou appliquée.*

Nous allons maintenant examiner quelques variantes un peu moins classiques.

2 La variante infinie

Théorème 4 *: Si on a un nombre fini de chemises à ranger dans un nombre infini de tiroirs,il y a une infinité de tiroirs qui resteront vides.*

Théorème 5 *: Si on a un nombre infini de chemises à ranger dans un nombre fini de tiroirs,il y a au moins un tiroir qui contiendra une infinité de chemises.*

Théorème 6 *(qui n'en est pas un) : Si on a une infinité de chemises à ranger dans une infinité de tiroirs,on ne peut rien dire à priori,sauf à hiérarchiser correctement les différents infinis.*

3 La variante infinie «avancée»

Dans ce paragraphe,κ et λ désignent 2 cardinaux infinis,avec $\kappa > \lambda$

Théorème 7 *: Si on a λ chemises à ranger dans κ tiroirs,il y a κ tiroirs qui resteront vides.*

Théorème 8 *: Si on a κ chemises à ranger dans λ tiroirs,il y a au moins un tiroir qui contiendra κ chemises.*

Théorème 9 *(qui n'en est pas un non plus) : Si on a κ chemises à ranger dans κ tiroirs,tout est possible...*