Lois de conservation de dimension quelconque

Version synthétique abrégée

Nous allons présenter ici une version simplifiée de la théorie des formes différentielles et de la dérivation (parfois dite “extérieure”) de ces formes. En cours de topologie algébrique en DEA de mathématiques, ces notions débouchent sur l'homologie singulière ou la cohomologie de De Rham, constructions essentiellement équivalentes entre elles et servent à décrire la topologie des variétés.

Une “variété” $\mathcal{V}$ de dimension n signifie en gros un espace de dimension n élastique, de forme quelconque, qu'on peut tordre. Par exemple des surfaces (de dimension 2) dans l'espace usuel (une sphère, une bouée) sont des variétés de dimension 2; mais on les considère en elles-mêmes et non comme des parties d'un espace de plus grande dimension: si on y considère des coordonnées pour un point, il n'y en aura que deux localement.

En fait, on ne s'intéressera ici essentiellement qu'aux propriétés locales et non à la topologie de ces variétés, donc cela correspondra à ce qui est valable dans un système de coordonnées; mais en l'occurence nous n'introduirons pas de coordonnées !

Cherchant seulement à “donner les idées” rapidement, nous n'entrerons pas non plus dans les détails de la rigueur analytique, ni dans l'étude des signes dus aux problèmes d'orientations des espaces.

Soit un entier $n > 0$ et une variété $\mathcal{V}$ de dimension n. A la fin on prendra $n = 4$ pour les quatre dimensions de l'espace-temps, mais il est bon de voir le cas général qui n'est essentiellement pas plus compliqué (et il est même mieux de s'entraîner d'abord avec $n = 2$ ou 3).

Dedans, pour tout entier p avec $0 \leq p \leq n$ on a la notion de *flux de dimension p*. Il se définit par sa mesure, également appelée *intégrale*, à travers les surfaces de dimension $n - p$.

Parmi les flux il y en a qui ont la propriété de se conserver, on les appellera des flux *fermés*; nous définirons cela plus loin.

Exemples

• Un flux de dimension $p = 0$ est une *densité*. Toutes les densités sont fermées par définition (on verra pourquoi).

• Un flux de dimension 1 correspond à la notion ordinaire de flux (ou courant); il se dessine par ses lignes de courant, lignes de dimension 1; en chaque lieu, ces lignes sont dans la direction du flux et sont d'autant plus rapprochées que le flux est intense.

Si ces lignes ne s'arrêtent pas (alors que leur proximité représente toujours l'intensité du flux), alors le flux est fermé. Mais elles ne représentent le flux qu'imparfaitement (approximativement): le flux réel est continu, infiniment divisible et non réparti en un nombre fini de lignes; lors de cette représentation imparfaite par des lignes il peut y avoir un petit problème de raccordement: en général, un flux fermé s'approximera par des lignes de courant telles qu'en chaque lieu il y a environ (en moyenne) autant de lignes qui partent que de lignes qui arrivent. Mais nous allons énoncer une approche plus fine dans le cas général.

• Cas des flux singuliers (p quelconque entre 0 et n), entiers ou non.

Une surface S de dimension p définit un flux singulier entier F_S de dimension p, de la manière suivante: son intégrale sur une surface S' de dimension $n - p$ se définit comme étant le nombre d'intersections entre S et S', comptées avec signe (le signe d'un point d'intersection se définit par l'orientation d'une base formée d'une base de l'espace tangent à S et une de l'espace tangent à S', suivant leurs orientations respectives). Un flux singulier non entier s'obtient en multipliant un flux entier par un nombre réel quelconque (ou comme sommes de flux multipliés par des nombres réels).

• Cas des flux réguliers.

Tout flux de dimension p s'approxime par des flux singuliers de surfaces de dimension p (éventuellement constituées d'un grand nombre de morceaux) emplissant l'espace de façon serrée, et avec un coefficient tendant vers 0. (L'intégrale de ce flux sur une surface est donc un grand nombre entier relatif de fois ce coefficient proche de 0). On peut même modéliser un flux régulier (continu) par l'artifice d'imagination suivant: pour chaque flux continu il existe une manière de tirer au hasard un flux singulier, tel que des flux singuliers voisins l'un de l'autre (on passe de l'un à l'autre en le poussant légèrement) ont des probabilités voisines de sortir par ce hasard. Alors l'intégrale du flux à travers une surface se définit comme étant l'espérance (la valeur moyenne) des flux définis ci-dessus pour ces tirages aléatoires de flux singuliers.

Cette manière d'expliquer tout flux régulier, pratique pour l'intuition et qui rend compte fidèlement et exactement de toutes ses propriétés, ne doit pas pour autant être confondue avec le flux lui-même: le truc est de se rappeler qu'il n'y a que le résultat qui compte, deux flux étant déclarés égaux dès que leurs intégrales sur toute surface sont égales, quelles que soient les causes (formes des surfaces singulières qui interviennent) imaginées pour cela.

Cette vision explique que l'intégrale d'un flux régulier sur une surface est toujours bien définie alors que celui d'un flux singulier peut ne pas l'être, au cas où le bord d'une surface rencontre l'autre surface (on passe ici brutalement de l'intersection à la non-intersection des surfaces lorsque l'une se déplace): l'une des surfaces étant tirée au hasard suivant une probabilité continue, la probabilité de tomber sur un tel cas limite est nulle.

Lorsqu'on retourne la surface (on prend la même surface mais d'orientation opposée), la mesure du flux change de signe.

Propriété. *L'intersection d'un flux régulier de dimension p et d'une surface S de dimension k est un flux de S de dimension $p+k-n$.*

Compacité. On dit qu'une surface est *compacte* si rien ne s'en échappe à l'infini; on peut alors la voir comme constituée d'un nombre fini de morceaux “raisonnables”. Un flux est compact s'il est contenu dans un volume compact (on peut éventuellement étendre ce qualificatif à des flux approximés par un flux singulier fixé à de petits mouvements près même pour son intégrale sur des surfaces non compactes)

Notion de bord. A toute surface S de dimension p on associe son bord δS, qui est une surface de dimension $p-1$. Le bord d'une surface compacte est également compact. Le bord de tout point est nul car il n'existe rien de dimension négative.

On dit qu'une surface est fermée si son bord est nul (vide). On dit qu'elle est un bord s'il existe une surface dont elle est le bord. Tout bord est fermé (pour tout S, $\delta(\delta S)=0$) mais le contraire n'est pas toujours vrai. La différence exprime des propriétés topologiques globales de la variété dans laquelle on est. On n'a pas besoin de connaître cette différence pour faire de la Relativité générale (ni même de distinguer ce qui est compact de ce qui ne l'est pas), car sa loi est d'expression purement locale. A titre de pure curiosité donc, mentionnons quelques exemples.

Exemples de surfaces fermées qui ne sont pas des bords - Cas où la variété $\mathcal{V}$ est elle-même compacte, par exemple une sphère (dans laquelle donc toutes les surfaces sont compactes). L'espace total $S=\mathcal{V}$ est fermé mais il n'est pas un bord car il n'existe dans $\mathcal{V}$ de dimension n aucune surface de dimension $n+1$. Tout point est sans bord mais un point n'est pas un bord car où arriverait la ligne qui en part ?

- Cas où $\mathcal{V}$ est un espace plat ordinaire. Le premier contre exemple ci-dessus $S=\mathcal{V}$ n'est pas compact, donc il reste un contre-exemple si on autorise les surfaces non compactes, mais est banni si on se restreint aux surfaces compactes. Le deuxième contre-exemple, par contre, ne demeure que si on se restreint aux surfaces compactes, tandis qu'il se résoud si on admet une courbe s'échappant à l'infini. (On pense à l'exemple d'une charge électrique dont les lignes de champ s'en vont à l'infini).

- Cas d'un espace-temps $n=4$ avec un trou noir. Une sphère de dimension 2 entourant le trou noir est fermée mais n'est pas le bord d'une surface compacte de dimension 3.

- Cas ou $\mathcal{V}$ est un tore, et S est une courbe qui en fait le tour.

Remarque: le cas d'une hypersurface (= de dimension $p=n-1$) fermée, a la propriété exceptionnelle qu'il y a ”presque” unicité du volume ont elle est bord (il suffit de choisir combien on met de couches en un lieu… par exemple, de mettre zéro couche à l'infini, pour avoir un volume compact qui sera le volume intérieur).

Démonstration: si $S=\delta V=\delta V'$ alors $\delta(V-V')=0$ donc le volume $V-V'$ est sans bord. Or il n'y a pas beaucoup de volumes sans bord…

Divergence; flux fermé. La divergence d'un flux F de dimension p est un flux δF de dimension $p-1$ qui se définit des manières suivantes, équivalentes sauf problème de signe:

• La divergence d'un flux singulier entier défini par une surface, est donnée par son bord. Le cas général (flux non entiers ou réguliers) s'en déduit comme engendré par ce cas.

• Pour tout flux régulier F de dimension P et toute surface S de dimension $n-p+1$ tels qu'un des deux est compact,

$$\int_S \delta F = (\pm) \int_{\delta S} F.$$

On vérifie l'équivalence en considérant pour un flux singulier S, le flux $S \cap F$ de dimension 1 dans S: c'est aussi un flux singulier, de bord $\delta(S \cap F) = (\delta S) \cap F \pm S \cap \delta F$. Il est compact car S ou F l'est, donc chaque ligne qui le compose a deux extrémités opposées. Les extrémités de ses lignes à l'intérieur de S, de somme algébrique $\int_S \delta F$, compensent celles arrivant sur δS. CQFD.

Un flux fermé est un flux dont la divergence est nulle. Autrement dit, c'est un flux qui s'annule sur les bords de surfaces compactes, et les flux singuliers donnés par des surfaces fermées (non compactes) sont fermés.

Un flux s'annulant sur les surfaces fermées compactes est dit **exact** (en fait, il s'obtient alors comme divergence d'un autre flux, mais passons). Par exemple le champ électrique d'un trou noir chargé est fermé (sa divergence est partout nulle, il n'y a pas de charge), mais non exact: il ne s'annule pas sur une sphère entourant le trou noir.

L'intégrale d'un flux exact sur une surface S ne dépend que de δS: en effet, soit S' tel que $\delta S = \delta S'$, alors $\delta(S - S') = \delta S - \delta S' = 0$ donc F s'annule sur la surface fermée $S - S'$, ce qui donne l'égalité des intégrales.

De même, l'intégrale d'un flux fermé sur une surface compacte S ne varie pas si on pousse la surface en laissant fixe son bord, car la surface engendrée par ce déplacement de S à S' a pour bord $S - S'$.

On appelle cela la *conservation* du flux de S à S'.

Electromagnétisme et conservation de la charge électrique.

Le champ électromagnétique obéit à deux équations.

1) Il est assimilable à un flux F de dimension 2 dans l'espace-temps de dimension 4. La première équation dit que sa divergence, flux de dimension 1, est la charge électrique. Etant égale à une divergence, cette charge est fermée : elle se conserve.

2) Mais il est aussi assimilable à un autre flux F^*, dit *dual de F*, ainsi défini: à chaque surface élémentaire constituant F dans une approximation par un flux singulier, correspond une surface élémentaire de F^* qui lui est orthogonale et de même intensité. La deuxième équation dit que F^* est fermé (voire probablement exact, à moins qu'il n'existe des trous noirs magnétiquement chargés. . .).

En pratique, un flux fermé de dimension 2 dans l'espace-temps apparaît comme des lignes de champ fermées et qui se conservent au cours du temps: ainsi, une ligne de champ magnétique à travers une bobine ne peut pas disparaître sur place mais doit traverser la bobine pour en sortir, ce qui induit un courant.

En tant que flux exact de dimension 2, il est égal à la divergence d'un flux de dimension 3 appelé improprement *quadrivecteur potentiel*.

On comprend mieux en considérant l'électrostatique dans l'espace à 3 dimensions: dans cette situation, le flux F^* apparaît comme étant un flux fermé de dimension 2 dans l'espace. Alors, son intégrale sur une courbe ne dépend que des extrémités de la courbe: c'est la différence de potentiel entre elles. La fonction potentielle est ainsi déterminée à une constante additive près, et, considérée comme flux de dimension 3, sa divergence, ici communément appelée *gradient*, est F^*. On obtient une approximation par flux singuliers de F^* sous forme de ses surfaces équipotentielles: ce sont des surfaces fermées.

Ainsi, un flux fermé de dimension $n-1$ détermine presque (= à une constante additive près) le flux de dimension n dont il dérive, de même qu'une surface fermée de dimension $n-1$ enferme un volume déterminé.