**Lois de conservation dans le plan**

## Introduction

Lorsqu'on parle de lois de conservation, on pense souvent à la conservation au cours du temps. Or selon la relativité restreinte, le temps n'est au fond qu'une quatrième dimension à côté des dimensions d'espace. On doit donc pouvoir se rendre compte que des lois de conservation au cours du temps ont leurs analogues dans l'espace, et notamment dans le plan, et ce sans nécessiter le choix d'un repère. L'avantage du plan est qu'il permet de modéliser simplement la conservation du courant d'une part, celle des forces d'autre part.

## Première partie: conservation du courant

La loi de conservation la plus simple est celle du courant: par exemple courant électrique, courant d'eau... On peut imaginer des courants bien canalisé par des fils ou des tuyaux, ou bien au contraire qui s'éparpillent dans tous les sens comme dans un torrent. La conservation s'exprime par le fait que pour toute zone fermée, la somme des courants qui y arrivent est égale à la somme des courants qui repartent, autrement dit que la somme algébrique des courants qui arrivent (ceux qui partent étant comptés négativement) est nulle.

Si on choisit un repère pour interpréter une coordonnée comme du temps, cela prend la forme de la conservation de la charge ou de toute autre qui se conserve "au cours du temps": masse, nombre d'atomes en l'absence de réactions nucléaires etc.

Ce phénomène se modélise à l'aide d'un relief: une fonction "altitude" ou "potentiel" $V$ définie sur le plan à une constante additive près. Les lignes de niveau de ce relief représentent les lignes de courant. Elles ont la propriété de se conserver: une ligne de niveau peut se refermer sur elle-même, s'éloigner indéfiniment, ou rebrousser chemin mais jamais s'arrêter.

La correspondance est définie de la manière suivante: quels que soient les points $M$ et $N$ du plan, $V(M)-V(N)$ est égal au courant qui circule entre ces deux points, avec un signe qui dépend de l'orientation choisie du plan. Autrement dit c'est, pour tout chemin $\Gamma$ allant de $M$ vers $N$, le courant total qui traverse $\Gamma$, par exemple de la droite vers la gauche.

Pour construire une telle carte à partir d'un courant donné, il suffit de choisir un point $O$ du plan qui servira d'origine des potentiels, et pour tout point $M$, $V(M) = V(M)-V(O)$ est défini par la règle ci-dessus, et la conservation du courant assure la cohérence de cette définition.

Réciproquement, tout courant défini par un relief peut se réaliser comme le courant d'un fluide incompressible (un liquide) en dimension deux (à condition de le guider à l'aide de fines parois suivant les lignes de courant qu'on veut réaliser). Ce courant se décrit également par le champ de vecteurs vitesse du fluide; on appelle ainsi vecteur courant ce vecteur vitesse (multiplié par la densité qu'on peut dire égale à 1 par convention). Le long d'un tuyau (entre deux parois), la vitesse du fluide doit être inversement proportionnelle à l'épaisseur du tuyau, donc proportionnelle à la pente dans le relief.

Lorsqu'on choisit un repère $(x, y)$, on peut convenir que le vecteur vitesse ($v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}$) est tel que la pente $\frac{\partial V}{\partial x}$ de $V$ suivant l'axe des $x$ vaut $-v_y$ et que celle $\frac{\partial V}{\partial y}$ suivant l'axe des $y$ est $v_x$ (la convention est dans le choix de l'orientation).

Le fait que ce fluide soit incompressible se traduit par le fait que si on colore une certaine partie du fluide et qu'on le laisse s'écouler, l'aire de la partie colorée reste constante au cours du temps.

Saviez-vous que les torrents suivent les lignes de niveau d'une montagne ? C'est pourtant logique: l'énergie de l'eau est proportionnelle à son altitude, or la conservation de l'énergie est une loi fondamentale de la physique. Donc l'altitude d'un courant d'eau doit rester constante. ;–)

Voici quelques illustrations de ce phénomène.

### La météo

La rotation de la Terre induit une déviation de Coriolis des vents, vers la droite dans l'hémisphère nord, et vers la gauche dans l'hémisphère sud. Le vent serait normalement poussé des zones de hautes pression vers les zones de basse pression (en fait il ne peut pas faire simplement ce mouvement car sinon en quelques secondes il n'y aurait plus de différence de pression; cela doit dépendre de l'altitude...); il est dévié vers la gauche et prend ainsi une direction voisine des isobares (les lignes de pression constante). La force de Coriolis qui s'exerce alors sur ce vent est dirigé des zones de basse pression vers les zones de hautes pression, ce qui équilibre la force exercée par la pression. On peut même dire que c'est la force de Coriolis qui maintient pour une bonne part les différences de pression (du moins celles à l'échelle du millier de kilomètres).

**Le gyroscope**

Un gyroscope est un solide animé d'un mouvement de rotation à grande vitesse autour d'un axe $\Delta$. On suppose qu'il possède une symétrie cylindrique par rapport à $\Delta$ et qu'aucun frottement ne perturbe cette rotation, si bien que la composante $L_0$ du moment cinétique $L$ du solide dans la direction de $\Delta$ est constante. la partie $L_\perp$ orthogonale à $\Delta$ de ce moment est liée à la vitesse de variation de la direction de $\Delta$ (et est perpendiculaire à cette variation). Comme $L$ se conserve, lorsque $\Delta$ varie la composante Ł$_0$ se communique à $L_\perp$ et le fait dévier: le mouvement de $\Delta$ subit une déviation analogue à la déviation de Coriolis.

Si aucune force extérieure ne s'applique, cette déviation entraine $\Delta$ en de petits mouvements circulaires autour de $L$ avec une fréquence comparable à la fréquence de la rotation du solide autour de $\Delta$ (le rapport étant lié à celui du moment d'inertie par rapport aux différentes directions). Si cette fréquence est très rapide, cela prend l'aspect de petites vibrations.

En pratique, des forces extérieures s'appliquent, et ont pour effet d'amortir ces vibrations. Alors on peut approximativement identifier $\Delta$ à la direction de $L$. Comme $L$ est un grand vecteur, il est difficile de bouger sa direction. Lorsqu'on exerce une force "voulant" tourner $\Delta$ dans une certaine direction, on communique en fait un moment cinétique qui s'ajoutant à $L$ dicte une **vitesse** (et non une accélération) de $\Delta$ dans une direction perpendiculaire.

L'ensemble des directions possibles de $\Delta$ forme une sphère, sur laquelle on peut appliquer la même construction que dans le plan: si on lui applique une force venant d'un potentiel $V$, le mouvement de $\Delta$ sera celui d'une particule d'un fluide incompressible sur la sphère dont le courant est défini par le potentiel $V$.

Prenons l'exemple d'une toupie. Le fait que sa pointe soit posée sur le sol amortit les vibrations assez rapidement. Il y a la force de pesanteur qui s'exerce. L'altitude constitue un champ de potentiel sur la sphère qui définit dessus un mouvement de fluide (horizontal, suivant les parallèles) qui n'est autre en fait que le mouvement de rotation d'une sphère solide autour de la verticale. C'est pourquoi l'inclinaison de l'axe d'une toupie tourne autour du temps.

**Le hamiltonien et la mécanique quantique.**

Pour finir étudions le mouvement d'une particule (par exemple une bille) contrainte à suivre un mouvement à une dimension mesuré par son abscisse $x$, et soumise à une force définie par un potentiel $E(x)$ (la bille est dans une rigole, x est l'abscisse curviligne et $V$ est l'altitude).

On va considérer son mouvement dans le plan de coordonnées $(x, v)$ où $v = \frac{dx}{dt}$ est la vitesse de la particule. Ce plan est appelé espace des phases. (Pour être plus général il faudrait remplacer $v$ par la quantité de mouvement qui vaut $p = mv$ en mécanique non relativiste, $m$ étant la masse de la bille, et multiplier l'altitude par $m$ pour avoir une énergie potentielle; mais on prendra ici la convention m=1).

On définit dans ce plan le potentiel $H(x, v) = E(x) + \frac{v^2}{2}$ appelé le hamiltonien de la particule, et qui n'est autre que son énergie totale.

Le mouvement de la particule obéit aux équations:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v = \frac{\partial H}{\partial v} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{dE}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}.$$

Il suit donc le mouvement du fluide dans l'espace des phases dont le courant correspond au potentiel $H$.

De cela il résulte deux choses: premièrement, que l'énergie $H$ de la bille reste constante au cours du temps, ce qui est la moindre des choses, mais également que le volume dans l'espace des phases est incompressible au cours du temps. C'est le cas particulier en dimension 2 du théorème de Liouville valable dans un espace des phases de dimension $2n$ pour $n$ entier quelconque. (Par exemple n=3 pour l'évolution d'une particule dans l'espace à 3 dimensions)

En mécanique quantique un système est décrit par un vecteur $\psi$ d'un espace de Hilbert qui est un espace complexe de dimension infinie avec une structure euclidienne. Oublions pour simplifier qu'il est complexe. L'ensemble des états est la sphère de rayon 1, qui subit au cours du temps une rotation.

La correspondance entre l'espace des phases et l'espace de Hilbert est grosso modo la suivante: une zone $Z$ de l'espace des phases correspond à un sous-espace de l'espace de hilbert dont la dimension est égale au volume de $Z$ divisé par $(2\pi\hbar)^n$, où $\hbar$ est la constante de Planck et $2n$ est la dimension de l'espace des phases.

Par exemple si on y met $k$ électrons, le principe d'exclusion de Pauli s'exprime par le fait qu'ils occupent $k$ dimensions de l'espace de Hilbert, et un volume $k(2\pi\hbar)^n$ dans l'espace des phases, de manière incompressible.

On comprend que le nombre de dimensions d'un espace euclidien ne peut varier au cours d'une rotation !

Malheureusement la visualisation d'un état quantique dans l'espace des phases est très mal définie. les contours des zones sont nécessairement flous. Il n'est même pas évident au vu du formalisme que l'on puisse distinguer quoi que ce soit. Il y a cependant une astuce, qui est la suivante (elle n'est pas parfaite, mais c'est mieux que rien).

Considérons le problème du comportement d'un électron dans le plan $(x, y)$ de l'espace physique et que l'on soumet à un fort champ magnétique uniforme et orthogonal à ce plan. L'électron étant dévié par ce champ ne peut aller loin dans son élan mais doit décrire un petit mouvement circulaire. Il est donc localisé, ce sépare en niveaux les énergies possibles. On choisit le plus bas niveau d'énergie, car c'est celui où l'électron est le mieux localisé. Alors on observe un fait remarquable, c'est que le plan $(x, y)$ acquiert alors les mêmes propriétes que l'espace des phases $(x, v)$. On peut alors recopier formellement dans $(x, y)$ un phénomène ou un état qui était défini dans $(x, v)$. Et comme il est permis de mesurer simultanément les deux coordonnées $(x, y)$ d'un électron dans l'espace physique, la répartition des probabilités de mesurer l'électron aux différents points de l'espace donne une visualisation de son état dans l'espce des phases.

L'ennui est que le mouvement circulaire est non nul bien que minimisé par le choix du plus bas niveau d'énergie, et donne donc une image plus floue que la réalité. Par exemple, un état de position connue et donc de vitesse inconnue devrait se représenter par une droite de l'espace des phases. Or ici il prend l'aspect d'un boudin de longueur infinie, mais d'épaisseur non nulle.

## Deuxième partie: conservation des forces.

On va étudier à présent la conservation des forces dans le plan. commençons par y tendre un fil: la tension se conserve le long du fil. Si on noue trois extrémités de fils en un point $M$, la conservation des forces s'exprime par le fait que la somme des vecteurs forces que les fils exercent sur $M$ est nul (c'est la conservation de la résultante; le fait que les droites portant les fils passent par un même point $M$ assure la conservation du moment).

Un tel shéma se réinterprète lorsqu'on considère une coordonnée comme représentant le temps: la composante spatiale représente la quantité de mouvement, et la composante temporelle représente respectivement la masse ou l'énergie suivant qu'on se place en mécanique classique ou relativiste.

Alors le phénomène peut se voir suivant sa disposition, soit comme étant une particule qui va à une certaine vitesse dans un sens et subit brusquement une force répulsive qui lui fait rebrousser chemin, soit comme une particule qui éclate en deux.

On modélise cette conservation également par un relief: l'exemple ci-dessus se modélise par l'image du coin d'un cube ou celui d'un mur dans une pièce. Convenons par exemple qu'une force attractive comme la tension d'un fil se représente par un angle rentrant (un sillon) et une force répulsive par un angle sortant. On choisit donc ici le coin d'un mur.

Prenons un autre exemple: un arc tendu à l'aide d'un bâton. Il lui correspond une sorte de pyramide avec une face abrupte comme une falaise correspondant à la partie rigide de l'arc, car elle se trouve tordue.

Plus généralement on a une correspondance entre un relief et un système de forces dans le plan qui se conservent, de la manière suivante:

Soit un espace affine $E$ de coordonnées $(x, y, z)$ dans lequel on provilégie l'axe des $z$ car les forces sont définies dans le plan $P$ de coordonnées $(x, y)$. Le relief est une surface $S$ définie par une fonction $z = h(x, y)$. Pour tout point $M$ de $P$ on considère le plan tangent à $S$ au point $M$, et on note son équation $z = T_M(x, y) = a_M x + b_M y + c_M$.

On définit le champ de forces par le fait que quels que soient les points $M$ et $M'$, la force circulant entre $M$ et $M'$, plus précisément la force que le côté droit exerce sur le côté gauche lorsqu'on va de $M$ vers $M'$ est la force dont le moment en tout point $N$ est $T_{M'}(N) - T_M(N)$. Autrement dit, c'est la force dont le vecteur est de composantes $(b_{M'} - b_M, a_M - a_{M'})$ et dont la droite support est l'image dans $P$ de la droite d'intersection des plans tangents $T_M$ et $T'_M$.

Réciproquement, à tout champ de forces on fait correspondre un relief qui est déterminé une fois choisie arbitrairement l'équation du plan tangent en un point.

**Remarque d'introduction à la relativité générale.**

La relativité générale consiste à décrire l'interaction gravitationnelle comme étant non une force mais la manifestation de la courbure de l'espace-temps dont l'évolution est dictée par le comportement de la matière qui s'y trouve.

Le principe est le suivant.

La coubure d'un espace $M$ de dimension $d$ est décrit par un champ qui est la donnée, en tout point $P$ de $M$, d'un vecteur $R$ d'un certain espace vectoriel $V_P$ qui dépend de $P$ et qu'on appelle tenseur de courbure. La dimension de $V_P$ vaut 1 si $d = 2$, 6 si $d = 3$ et 20 si $d = 4$. Des coordonnées locales de $M$ au voisinage de $P$ donnent des coordonnées naturelles de $V_P$.

D'autre part, on définit un autre tenseur appelé tenseur d'énergie impulsion et qui décrit dans l'infiniment petit l'énergie, la quantité de mouvement et les forces qui se conservent. La dimension de son espace en tout point est $\frac{1}{2}d(d+1)$.

Pour la dimension 2 dont il est question ici, les trois composantes de ce tenseur sont données par les dérivées partielles secondes de la fonction $h$: en nommant $x$ et $t$ les coordonnées, la densité d'énergie (en relatvité; sinon c'est la densité de masse) vaut $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, la densité de quantité de mouvement ou flux d'énergie vaut $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}$ et la pression vaut $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$. Attention! cette construction ne se généralise pas en dimension différente de 2.

Ensuite, en dimension 4 (celle de l'espace-temps), on remarque le fait extraordinaire qu'il y a une unique manière de définir le tenseur d'énergie-impulsion $T$ comme une fonction linéaire du tenseur de courbure de telle sorte que la loi de conservation naturelle de $T$ se trouve être un théorème de géométrie. Ceci bien sûr à une contante de proportionnalité près correspondant à la constante de gravitation universelle.

Et puis, encore plus étonnant, on constate que cela marche bien, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autre contrainte géométrique sur $T$ que sa conservation naturelle, et que son comportement une fois dicté par les propriétés de la matière, l'évolution de la courbure de l'espace-temps se trouve entièrement déterminé.

En dimension 3, les choses sont plus simples car les tenseurs $R$ et $T$ s'identifient, si bien qu'il n'y a pas d'interaction à distance: là où il n'y a pas de matière ($T = 0$), l'espace est plat ($R = 0$).

Décrivons d'abord ce qui se passe en dimension 2: la courbure, étant de dimension 1, ne peut correspondre à un tenseur d'énergie-impulsion qui serait de dimension 3, mais elle correspond à une densité de masse, de la manière suivante. Traçons une courbe $\Gamma$ de la surface courbe et cherchons à définir la masse qui se trouve à l'intérieur.

On commence par épaissir $\Gamma$ par une courbe voisine pour former une fine bande de papier. On coupe cette bande en un point (dans le sens de la largeur) pour l'ouvrir, ce qui permet de l'étaler sur un plan. Considérons les deux segments $S$ et $S'$ des extrémités de la bande dans le plan et qui correspondent à la coupure. Alors la rotation du plan qui renvoie $S$ sur $S'$ tels qu'ils étaient collés au départ a pour angle la masse du système matériel contourné et pour centre le centre d'inertie de ce système.

Le problème est que ce centre d'inertie n'est pas défini dans la surface de départ. Pour l'y voir quand même on peut se restreindre au cas où cette surface est presque plate, autrement dit au cas où la constante de gravitation universelle est infiniment petite.

On va également faire cette approximation en dimension 3. Considérons un espace de dimension 3 dans lequel les forces circulent uniquement dans un plan $P$ , car c'est le phénomène de conservation dans un plan que l'on a ici modélisé.

Ce plan $P$ découpe l'espace en deux moitiés symétriques l'une de l'autre. Chacune de ces moitiés est de courbure nulle (puisqu'il ne contient pas de force): on peut donc l'imaginer comme une partie de l'espace plat (euclidien). Cette partie est délimitée par une surface qui est une face de $P$. Le relief de cette suface détermine le champ des forces dans le plan comme nous l'avons construit (et cette correspondance n'est là encore bien définie que dans la mesure où la constante de gravitation est infiniment petite).